



Automorphismes réels d'un fibré et opérateurs de Cauchy-Riemann

Rémi Crétois

► To cite this version:

Rémi Crétois. Automorphismes réels d'un fibré et opérateurs de Cauchy-Riemann. 2011. hal-00637295

HAL Id: hal-00637295

<https://hal.science/hal-00637295>

Preprint submitted on 31 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Automorphismes réels d'un fibré et opérateurs de Cauchy-Riemann

Real automorphisms of a bundle and Cauchy-Riemann operators

Rémi CRÉTOIS

31 octobre 2011

Résumé

Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle au-dessus d'une courbe réelle (Σ_g, c_Σ) de genre $g \in \mathbb{N}$. Nous étudions le signe de l'action des automorphismes de (N, c_N) relevant l'identité de Σ_g sur les orientations du fibré déterminant au-dessus de l'espace des opérateurs de Cauchy-Riemann réels de (N, c_N) . Ce signe s'obtient comme le produit de deux termes. Le premier calcule la signature des permutations induite par les automorphismes sur les structures Pin^\pm de la partie réelle de (N, c_N) . Le second provient de l'action des automorphismes du fibré sur les classes de bordisme de structures $Spin$ réelles de (Σ_g, c_Σ) .

Abstract

Let (N, c_N) be a complex vector bundle equipped with a real structure over a real curve (Σ_g, c_Σ) of genus $g \in \mathbb{N}$. We compute the sign of the action of the automorphisms of (N, c_N) lifting the identity of Σ_g on the orientations of the determinant line bundle over the space of real Cauchy-Riemann operators on (N, c_N) . This sign can be obtained as the product of two terms. The first one computes the signature of the permutations induced by the automorphisms acting on the Pin^\pm structures of the real part of (N, c_N) . The second one comes from the action of the automorphisms of (N, c_N) on the bordism classes of real $Spin$ structures on (Σ_g, c_Σ) .

CLASSIFICATION AMS 2010 : 14H60, 53D45.

MOTS CLÉS : fibrés vectoriels, courbes réelles, opérateurs de Cauchy-Riemann, espaces de modules, invariants de Gromov-Witten.

Table des matières

1	Le groupe des automorphismes d'un fibré réel	3
2	Étude des automorphismes réels de déterminant 1	7
2.1	Automorphismes réels et structures Pin^\pm sur $\mathbb{R}N$	8
2.2	Action des automorphismes réels de déterminant 1	9
2.3	Lacets d'opérateurs de Cauchy-Riemann et structures Pin^\pm	11
3	Étude des automorphismes réels au-dessus de l'identité	13
3.1	Automorphismes réels et structures $Spin$ réelles	14
3.1.1	Structure de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$	14
3.1.2	Structures $Spin$ réelles sur (Σ_g, c_Σ)	18

3.1.3	Action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ sur $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$	21
3.2	Actions des automorphismes réels au-dessus de l'identité	24
3.2.1	Énoncés	24
3.2.2	Conoyaux d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels	27
3.2.3	Action des automorphismes réels sur le fibré déterminant	37
3.3	Fibré déterminant sur le groupe de Picard	43

Références

45

Introduction

Soit Σ_g une surface compacte, connexe, sans bord, orientée et de genre $g \in \mathbb{N}$. Fixons une structure réelle sur Σ_g , c'est-à-dire une involution c_Σ de Σ_g qui renverse les orientations. Nous dirons alors que le couple (Σ_g, c_Σ) est une courbe réelle. Considérons un fibré vectoriel complexe N sur Σ_g . Fixons aussi une structure réelle sur N , c'est-à-dire une involution c_N de N induite par un isomorphisme entre N et $\overline{c_N^* N}$. L'ensemble $\mathbb{R}\Sigma_g$ des points fixes de c_Σ est une sous-variété de dimension 1 de Σ_g , éventuellement vide, au-dessus de laquelle l'ensemble $\mathbb{R}N$ des points fixes de c_N forme un fibré vectoriel réel de rang $\text{rg}(N)$. Prenons un opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}$ sur N qui est équivariant pour les actions de c_N sur les sections de N et sur les $(0, 1)$ -formes à valeurs dans N (voir Définition 1.1). Un tel opérateur induit une unique structure holomorphe sur N pour laquelle c_N est anti-holomorphe (voir [15]). Le noyau de cet opérateur, noté $H_{\bar{\partial}}^0(\Sigma_g, N)$, est alors formé des sections holomorphes de N , et son conoyau, noté $H_{\bar{\partial}}^1(\Sigma_g, N)$ est canoniquement isomorphe au premier groupe de cohomologie du faisceau des sections holomorphes de N . L'involution c_N induit deux applications \mathbb{C} -antilinéaires sur ces deux espaces; nous noterons avec un indice $+1$ les espaces propres associés à la valeur propre 1 de ces applications. Notons $\text{Det}(\bar{\partial})$ la droite déterminant du complexe trivial $\{(H_{\bar{\partial}}^*(\Sigma_g, N)_{+1}, \bar{\partial})\}$. L'ensemble $\mathbb{RC}(N)$ de tous ces opérateurs de Cauchy-Riemann sur (N, c_N) est un espace contractile, et l'union de toutes les droites déterminant forme un fibré en droites réelles $\text{Det}(N)$ au-dessus de $\mathbb{RC}(N)$ (voir [17]). Remarquons que lorsque N est de rang 1 et de degré congru à $g - 1$ modulo 2 le fibré $\text{Det}(N)$ induit un fibré en droites réelles qui n'est a priori pas orientable sur la composante du groupe de Picard réel de (Σ_g, c_Σ) contenant les fibrés en droites holomorphes réels de degré $\deg(N)$ et dont la partie réelle a même première classe de Stiefel-Whitney que $\mathbb{R}N$ (voir §3.3). D'autre part, le groupe $\mathbb{R}Aut(N)$ des automorphismes de (N, c_N) agit naturellement sur $\text{Det}(N)$. Le but de cet article est d'étudier cette action.

Celle-ci apparaît lorsque l'on s'intéresse à l'orientabilité de l'espace de modules $\mathbb{RM}_g^d(X, J)$ des courbes réelles J -holomorphes dans une variété symplectique (X, ω) munie d'une involution c_X anti-symplectique, qui sont de genre g et de degré $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$, et où J est une structure presque complexe générique sur X compatible avec ω rendant c_X anti-holomorphe. En effet, étant donnée une telle courbe immergée $u : (\Sigma_g, c_\Sigma) \rightarrow (X, c_X)$, on a un morphisme de monodromie $\mu : \pi_1(\mathbb{RM}_g^d(X, J), u) \rightarrow \pi_0(\mathbb{R}Aut(N_u))$, où N_u est le fibré normal à u . Alors pour tout $\gamma \in \pi_1(\mathbb{RM}_g^d(X, J), u)$, la première classe de Stiefel-Whitney de $\mathbb{RM}_g^d(X, J)$ calculée le long de γ est nulle si et seulement si $\mu(\gamma)$ préserve les orientations de $\text{Det}(N_u)$ (voir [6]).

Dans le présent article, nous étudions l'action du sous-groupe $\mathbb{R}GL(N)$ de $\mathbb{R}Aut(N)$ formé des automorphismes de (N, c_N) qui valent l'identité sur Σ_g . D'une part, un élément de $\mathbb{R}GL(N)$ induit une permutation de l'ensemble à $2b_0(\mathbb{R}\Sigma_g)$ éléments formé des structures

Pin^\pm sur $\mathbb{R}N$. Nous notons $\varepsilon_{p^\pm} : \mathbb{R}GL(N) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le morphisme calculant la signature de ces permutations. D'autre part, nous montrons qu'un élément de $\mathbb{R}GL(N)$ agit à travers son déterminant sur les classes de bordisme de structures $Spin$ réelles sur (Σ_g, c_Σ) (voir §3.1.3). Étant donnée une structure complexe sur (Σ_g, c_Σ) , une structure $Spin$ réelle est la donnée d'un fibré en droites holomorphe L sur (Σ_g, c_Σ) , admettant une structure réelle et dont le carré est isomorphe au fibré canonique de Σ_g . Une telle structure admet une première classe de Stiefel-Whitney donnée par $w_1(\mathbb{R}N)$. Nous dirons alors que deux structures $Spin$ réelles sont bordantes si elles ont même première classe de Stiefel-Whitney et si elles ont même invariant d'Arf. Nous notons alors $\mathcal{A}^w : \mathbb{R}GL(N) \rightarrow \{0, 1\}$ le morphisme valant 0 seulement pour les automorphismes préservant les classes de bordisme de structures $Spin$ réelles sur (Σ_g, c_Σ) de première classe de Stiefel-Whitney w . La première partie du résultat principal de cet article est le Théorème suivant.

Théorème A. *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , de partie réelle non vide. Si $\deg(N) = g + 1 \pmod{2}$, alors le signe de l'action d'un automorphisme $f \in \mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$ est donné par le produit $\varepsilon_{p^\pm}(f)(-1)^{\mathcal{A}^{w_1(\mathbb{R}N)}(f)}$.*

Lorsque $\deg(N) = g \pmod{2}$ et $\text{rg}(N) = 1$, l'automorphisme $-\text{id}_N$ préserve les structures $Spin$ sur Σ_g mais renverse les orientations de $\text{Det}(N)$ d'après le Théorème de Riemann-Roch, ce qui montre que le Théorème A est faux dans ce cas. Nous définissons alors un nouveau morphisme $s_N : \mathbb{R}GL(N) \rightarrow \{0, 1\}$ en prenant en compte l'action des automorphismes sur les orientations des composantes orientables de $\mathbb{R}N$ (voir §3.2.1). Nous obtenons alors,

Théorème B. *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , de partie réelle non vide. Le signe de l'action d'un automorphisme $f \in \mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$ est donné par le produit $\varepsilon_{p^\pm}(f)(-1)^{s_N(f)}$.*

Ainsi, nous obtenons une interprétation en termes topologiques de l'action de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$.

En guise d'application, nous calculons la première classe de Stiefel-Whitney du fibré en droites réelles induit par le fibré déterminant sur le groupe de Picard réel d'une surface de Riemann réelle (Σ_g, c_Σ) (voir les Théorèmes 3.4 et 3.5).

Cet article est organisé de la façon suivante. Nous commençons par exposer quelques préliminaires concernant les éléments de $\mathbb{R}GL(N)$. Nous décrivons notamment la classe d'homotopie d'un tel automorphisme (voir §1). Les parties 2 et 3 sont consacrées à la démonstration des Théorèmes A et B. Nous traitons tout d'abord le cas d'un automorphisme de déterminant 1 (voir Théorème 2.1). Ceux-ci agissent trivialement sur les structures $Spin$ réelles et leur action sur les orientations de $\text{Det}(N)$ est entièrement décrite par le morphisme ε_{p^\pm} . Nous passons ensuite au cas général. Nous montrons qu'il nous suffit de traiter le cas où N est de rang 1. Nous décrivons alors l'action d'un élément de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les structures $Spin$ réelles de Σ_g puis nous relierons celle-ci à l'action de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$. Pour cela, nous traitons le cas du fibré trivial $(\mathbb{C}, \text{conj})$ en décrivant le conoyau d'un opérateur de Cauchy-Riemann réel sur ce fibré puis nous nous ramenons à ce cas en utilisant des transformations élémentaires (voir §3.2.3).

1 Le groupe des automorphismes d'un fibré réel

Soit (Σ_g, c_Σ) une courbe réelle. Les points fixes de c_Σ forment une sous-variété de dimension 1 de Σ_g notée $\mathbb{R}\Sigma_g$, qui n'est pas nécessairement connexe ou non vide (voir [18]).

La lettre k désignera toujours le nombre de composantes connexes $(\mathbb{R}\Sigma_g)_1, \dots, (\mathbb{R}\Sigma_g)_k$ de $\mathbb{R}\Sigma_g$, et nous supposons à partir de maintenant que k est non nul.

Considérons un fibré vectoriel complexe (N, c_N) muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) . Nous noterons généralement $(\mathbb{R}N)_i$ la restriction du fibré $\mathbb{R}N$ au-dessus de $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$.

Nous appellerons morphisme entre deux fibrés vectoriels complexes munis de structures réelles $\pi_N : (N, c_N) \rightarrow (\Sigma_g, c_\Sigma)$ et $\pi_{N'} : (N', c_{N'}) \rightarrow (\Sigma'_g, c_{\Sigma'})$ une paire (Φ, ϕ) composée

- d'un difféomorphisme $\phi : (\Sigma_g, c_\Sigma) \rightarrow (\Sigma'_g, c_{\Sigma'})$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant et préservant les orientations
- d'une application $\Phi : (N, c_N) \rightarrow (N', c_{N'})$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante, \mathbb{C} -linéaire dans les fibres et faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (N, c_N) & \xrightarrow{\Phi} & (N', c_{N'}) \\ \pi_N \downarrow & & \downarrow \pi_{N'} \\ (\Sigma_g, c_\Sigma) & \xrightarrow[\phi]{} & (\Sigma'_g, c_{\Sigma'}). \end{array}$$

Notons $\mathbb{R}GL(N)$ l'ensemble des automorphismes de (N, c_N) au-dessus de l'identité. Nous ne considérerons dans le présent article que de tels automorphismes, le cas général étant traité dans [1].

Nous rappelons tout d'abord un résultat de classification de ces fibrés à isomorphisme près qui nous sera utile par la suite (voir par exemple les Propositions 4.1 et 4.2 de [4]).

Lemme 1.1. *Deux fibrés vectoriels complexes munis de structures réelles (N, c_N) et $(N', c_{N'})$ sont isomorphes au-dessus de l'identité sur (Σ_g, c_Σ) si et seulement si ils ont même rang, même degré et si leurs parties réelles ont même première classe de Stiefel-Whitney.* \square

Notons $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ l'ensemble des structures complexes de Σ_g compatibles avec l'orientation fixée et pour lesquelles c_Σ est anti-holomorphe. Cet espace est non vide et contractile (voir [18], [22] et [24]).

Définition 1.1. *Fixons une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$, un entier $k \geq 1$ et un réel $p > 1$ tels que $kp > 2$. Un opérateur de Cauchy-Riemann réel sur (N, c_N) est un opérateur \mathbb{C} -linéaire*

$$\bar{\partial} : L^{k,p}(\Sigma_g, N) \rightarrow L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N)$$

équivariant sous l'action de c_N et vérifiant la règle de Leibniz :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}), \forall v \in L^{k,p}(\Sigma_g, N), \bar{\partial}(fv) = \bar{\partial}_J(f) \otimes v + f\bar{\partial}(v),$$

$$\text{où } \bar{\partial}_J = \frac{1}{2}(d + i \circ d \circ J).$$

Pour tout $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$, notons $\mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$ l'espace des opérateurs de Cauchy-Riemann sur (N, c_N) au-dessus de (Σ_g, c_Σ) munie de la structure J . Cet ensemble forme un espace affine de dimension infinie (voir [17]). Nous noterons d'autre part $\mathbb{R}\mathcal{C}(N)$ l'ensemble des paires $(\bar{\partial}, J)$ où $\bar{\partial}$ est un élément de $\mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$.

La structure réelle c_N induit une involution \mathbb{C} -antilinéaire sur les espaces de Banach $L^{k,p}(\Sigma_g, N)$ et $L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N)$. Nous notons avec un indice $+1$ (resp. -1) les sous-espaces propres associés à la valeur propre $+1$ (resp. -1). Un opérateur de Cauchy-Riemann réel $\bar{\partial}$ induit par restriction un opérateur Fredholm de $L^{k,p}(\Sigma_g, N)_{+1}$ dans $L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N)_{+1}$. Nous notons respectivement $H_{\bar{\partial}}^0(\Sigma_g, N)_{+1}$ et $H_{\bar{\partial}}^1(\Sigma_g, N)_{+1}$ le noyau et le conoyau

de l'opérateur obtenu. Par régularité elliptique, ces deux espaces vectoriels ne dépendent ni de k ni de p . Il existe sur l'ensemble $\mathbb{RC}(N)$ un fibré en droites réelles $\text{Det}(N)$ dont la fibre au-dessus de l'opérateur $\bar{\partial}$ est son déterminant $\text{Det}(\bar{\partial}) = \Lambda_{\mathbb{R}}^{\max} H_{\bar{\partial}}^0(\Sigma_g, N)_{+1} \otimes (\Lambda_{\mathbb{R}}^{\max} H_{\bar{\partial}}^1(\Sigma_g, N)_{+1})^*$ (voir 3.5). Comme $\mathbb{RC}(N)$ est un espace contractile, le fibré $\text{Det}(N)$ est orientable.

Nous étudions dans les §§2 et 3 de cet article l'action des automorphismes réels de (N, c_N) relevant l'identité sur le fibré $\text{Det}(N)$ au-dessus de $\mathbb{RC}(N)$. Cette action est définie de la façon suivante. Tout d'abord, les automorphismes réels de (N, c_N) agissent sur les espaces de sections de N et de $(0, 1)$ -formes à valeurs dans N d'une part et d'autre part sur les structures complexes de (Σ_g, c_{Σ}) respectivement par

$$\begin{aligned} (\Phi, \phi)_* s &= \Phi(s) \circ \phi^{-1} \\ (\Phi, \phi)^* \alpha &= \Phi^{-1} \circ \alpha \circ d\phi \text{ et} \\ (\Phi, \phi)^* J &= d\phi^{-1} \circ J \circ d\phi \end{aligned}$$

où s est une section de N , α est une $(0, 1)$ -forme à valeurs dans N et J une structure complexe sur la surface (voir [24]). De plus, cette action est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante. Ceci induit une action sur l'espace $\mathbb{RC}(N)$

$$(\Phi, \phi)^*(\bar{\partial}, J) = ((\Phi, \phi)^*(\bar{\partial}((\Phi, \phi).)), (\Phi, \phi)^* J)$$

et donc sur le fibré $\text{Det}(N)$.

Rien ne garantit qu'en agissant sur ce fibré les automorphismes réels de (N, c_N) préservent ses orientations. Nous allons donc étudier plus précisément l'action des éléments de $\mathbb{RGL}(N)$ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$.

Remarquons tout d'abord que cette action ne dépend que de la classe d'homotopie de l'automorphisme réel de (N, c_N) . Ainsi, nous commençons par décrire la structure des automorphismes réels d'un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle (N, c_N) sur (Σ_g, c_{Σ}) pris à homotopie près.

Introduisons pour cela le sous-groupe

$$\mathbb{RSL}(N) := \{\Phi \in \mathbb{RGL}(N) \mid \forall x \in \Sigma_g, \det(\Phi_x) = 1\}$$

des éléments de $\mathbb{RGL}(N)$ de déterminant 1.

Lemme 1.2. *Les suites suivantes sont exactes :*

$$0 \rightarrow \mathbb{RSL}(N) \rightarrow \mathbb{RGL}(N) \xrightarrow{\det} \mathbb{RC}^{\infty}(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$0 \rightarrow \ker(\text{rest}) \rightarrow \mathbb{RSL}(N) \xrightarrow{\text{rest}} \pi_0(SL(\mathbb{RN})) \rightarrow 0 \quad (2)$$

où :

$$\begin{aligned} \text{rest} : \quad \mathbb{RSL}(N) &\rightarrow \pi_0(SL(\mathbb{RN})) \\ \Phi &\rightarrow [\Phi|_{\mathbb{RN}}]. \end{aligned}$$

De plus, $\ker(\text{rest})$ est connexe.

Notons avant de passer à la démonstration que l'application \det est définie comme la composée de

$$\begin{aligned} \mathbb{RGL}(N) &\rightarrow \mathbb{RGL}(\det(N)) \\ \Phi &\mapsto \det(\Phi) \end{aligned}$$

et de l'isomorphisme canonique $\mathbb{RGL}(\det(N)) = \mathbb{RC}^{\infty}(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$.

Démonstration. (1) D'après le Lemme 1.1 nous avons un isomorphisme

$$(N, c_N) \cong (\det(N), c_{\det(N)}) \oplus (\mathbb{C}^{\text{rg}(N)-1}, \text{conj}) \quad (*)$$

où $(\mathbb{C}^{\text{rg}(N)-1}, \text{conj})$ est le fibré trivial de rang $\text{rg}(N) - 1$ sur (Σ_g, c_Σ) , et $\det(N) = \Lambda^{\max} N$. Si f est un élément de $\mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$, on obtient, grâce à l'isomorphisme (*), un automorphisme de (N, c_N) $\Phi_f = f \oplus \text{id}_{\mathbb{C}^{\text{rg}(N)-1}}$ vérifiant $\det(\Phi_f) = f$.

(2) Étudions tout d'abord la surjectivité de rest. Fixons pour cela une classe $[\Psi]$ dans $\pi_0(SL(\mathbb{R}N))$. Choisissons aussi deux ouverts emboîtés $\mathbb{R}V_i \subset \overline{\mathbb{R}V_i} \subset \mathbb{R}U_i$ homéomorphes à des intervalles sur chaque composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$, et k paires d'ouverts emboîtés disjointes $V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1, \dots, V_k \subset \overline{V_k} \subset U_k$ de Σ_g invariants sous l'action de c_Σ et homéomorphes à des disques, tels que $U_i \cap \mathbb{R}\Sigma_g = \mathbb{R}U_i$ et $V_i \cap \mathbb{R}\Sigma_g = \mathbb{R}V_i$. Prenons un représentant Ψ de la classe $[\Psi]$ tel que Ψ soit l'identité en dehors des $\mathbb{R}V_i$. En trivialisant (N, c_N) au dessus des U_i , $\Psi|_{\mathbb{R}\overline{V_i}}$ nous fournit k chemins dans $SL_{\text{rg}(N)}(\mathbb{R})$ dont les extrémités se recollent en l'identité. Ces lacets peuvent être homotopés dans $SL_{\text{rg}(N)}(\mathbb{C})$ (qui est simplement connexe) sur le lacet constant égal à l'identité. Ainsi, pour chaque i on peut prolonger Ψ sur une composante de $U_i - \mathbb{R}U_i$ puis sur tout U_i grâce à la structure réelle de (N, c_N) de sorte que ce prolongement soit l'identité sur $U_i - V_i$. On obtient un automorphisme réel de (N, c_N) relevant la classe $[\Psi]$ en prolongeant en dehors des U_i par l'identité.

Considérons enfin la connexité du noyau de rest. Fixons une triangulation T de (Σ_g, c_Σ) invariante sous l'action de c_Σ . Prenons Φ un élément de $\ker(\text{rest})$. On peut supposer que la restriction de Φ à $\mathbb{R}\Sigma_g$ est l'identité. On homotope Φ sur id progressivement :

1. tout d'abord au-dessus des sommets de T ,
2. puis au-dessus des arêtes de T , ce que l'on peut faire puisque $\pi_1(SL_{\text{rg}(N)}(\mathbb{C}))$ est trivial,
3. et enfin au-dessus des faces de T , ce qui est possible car $\pi_2(SL_{\text{rg}(N)}(\mathbb{C}))$ est trivial.

□

Remarque 1.1. —

- Si $\text{rg}(N) \geq 3$, $\pi_0(SL(\mathbb{R}N)) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$, où $k = b_0(\mathbb{R}\Sigma_g)$.
- Le cas $\text{rg}(N) = 2$ est particulier. Le Lemme 1.3 en donne une description.
- Lorsque $\text{rg}(N) = 1$, l'application $\det : \mathbb{R}GL(N) \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ dans la suite exacte (1) est en fait un isomorphisme, et le groupe $\mathbb{R}SL(N)$ est trivial.

Lemme 1.3. Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe de rang 2 muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) . Alors, le groupe $\pi_0(SL(\mathbb{R}N))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{k_+} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k_-}$, où

$$k_+ = \text{card} \{1 \leq i \leq k \mid w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) = 0\}$$

$$\text{et } k_- = \text{card} \{1 \leq i \leq k \mid w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) \neq 0\}.$$

De plus, avec les notations du Lemme 1.2 et sous cet isomorphisme, l'image de $\text{rest}(-\text{id}) \in \pi_0(SL(\mathbb{R}N)) \cong \mathbb{Z}^{k_+} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k_-}$ par l'application de réduction modulo 2 $\mathbb{Z}^{k_+} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k_-} \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ est égale à $(w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_1), \dots, w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_k))$.

Démonstration. Fixons $1 \leq i \leq k$. Nous distinguons deux cas, suivant que $(\mathbb{R}N)_i \rightarrow (\mathbb{R}\Sigma_g)_i$ est orientable ou non.

Si $w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) = 0$: Nous pouvons dans ce cas trivialisier le fibré $(\mathbb{R}N)_i$. Dans cette trivialisatation, un automorphisme du fibré à homotopie près est donné par une classe dans le groupe fondamental de $SL_2(\mathbb{R})$. Or, ce groupe fondamental est isomorphe à \mathbb{Z} .

Dans le cas particulier de $-\text{id}$, nous obtenons le lacet constant égal à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, qui est homotope au lacet constant égal à l'identité.

Si $w_1(\mathbb{R}N)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) = 1$: Le raisonnement employé ici s'inspire de [21]. Le fibré $(\mathbb{R}N)_i$ est isomorphe au fibré $[0, 1] \times \mathbb{R}^2 / (0, v) \sim (1, r(v))$ où $r(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Sous cet isomorphisme, un élément de $SL((\mathbb{R}N)_i)$ correspond à une application $f : [0, 1] \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = rf(1)r$. Cette dernière condition se réécrit grâce à la décomposition polaire, produit d'une rotation par une triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs,

$$f(t) = r_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \lambda(t) & a(t) \\ 0 & \frac{1}{\lambda(t)} \end{pmatrix}$$

en $\theta(0) = -\theta(1) \bmod 2\pi$ et $a(0) = -a(1)$. D'autre part, cette décomposition fournit aussi une rétraction de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $SO_2(\mathbb{R})$

$$h : [0, 1] \times SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$$

$$\left(s, r \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \right) \mapsto r \begin{pmatrix} (1-s)\lambda + s & (1-s)a \\ 0 & \frac{1}{(1-s)\lambda + s} \end{pmatrix}$$

qui préserve les conditions précédentes. En appliquant cette rétraction, nous obtenons une homotopie $h(s, f)$ joignant f à r_θ . Ainsi, une classe d'homotopie d'éléments de $SL((\mathbb{R}N)_i)$ correspond à une classe d'homotopie d'applications $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ avec $\theta(0) = -\theta(1) \bmod (2\pi)$, c'est-à-dire à une classe d'homotopie de sections d'une bouteille de Klein (vue comme fibré en cercles au-dessus du cercle). Or, il n'y a que deux telles classes qui sont définies par les lacets $\theta(t) = 0$ et $\theta(t) = \pi$. Le premier correspond à id , le second à $-\text{id}$.

□

Notation 1. — On note rest_2 la composée de rest avec la réduction modulo 2

$$\pi_0(SL(\mathbb{R}N)) \rightarrow \pi_0(SL(\mathbb{R}N))/2\pi_0(SL(\mathbb{R}N)) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k,$$

et on notera avec un indice i entre 1 et k les composantes de rest_2 .

2 Étude des automorphismes réels de déterminant 1

Nous nous intéressons dans cette section à l'action du groupe $\mathbb{R}SL(N)$ des automorphismes réels de déterminant 1 d'un fibré (N, c_N) sur le fibré $\text{Det}(N)$.

Comme nous l'avons noté dans la Remarque 1.1, lorsque le rang de N est égal à 1 le groupe $\mathbb{R}SL(N)$ est trivial et agit donc trivialement sur le fibré $\text{Det}(N)$. Nous supposons dans cette section que N est de rang au moins deux.

D'après le Lemme 1.2, cette action se factorise à travers le morphisme rest_2 et nous commençons par réinterpréter ce morphisme en termes d'action des automorphismes sur les structures Pin^\pm de $\mathbb{R}N$. Nous étudions ensuite l'action des automorphismes de déterminant 1 sur le fibré $\text{Det}(N)$ et nous démontrons en particulier le Théorème 2.1 qui est un cas particulier du Théorème B.

Théorème 2.1. *Soit t un automorphisme de (N, c_N) relevant l'identité et de déterminant 1. Alors t préserve les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ si et seulement si le nombre de composantes de $\mathbb{R}N$ dont les structures Pin^\pm sont échangées sous l'action de t est pair.*

Celui-ci fournit une interprétation topologique de l'action de $\mathbb{R}SL(N)$ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$. En guise d'application, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que le fibré déterminant au-dessus d'un lacet d'opérateurs de Cauchy-Riemann soit orientable.

2.1 Automorphismes réels et structures Pin^\pm sur $\mathbb{R}N$

Commençons par quelques rappels au sujet des structures Pin^\pm . Fixons un fibré vectoriel réel V de rang n au moins 2 au-dessus d'une base B et notons R_V le fibré principal des repères associé. Ce fibré a pour groupe structural $GL_n(\mathbb{R})$; celui-ci a un revêtement double (topologique) non trivial au-dessus de chaque composante connexe qui admet deux structures de groupe distinctes relevant celle de $GL_n(\mathbb{R})$. Ces deux groupes sont notés $\widetilde{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\widetilde{GL}_n^-(\mathbb{R})$. Une structure \widetilde{GL}_n^\pm sur V est la donnée d'une classe d'isomorphisme de paires composées d'un fibré principal $P_{\widetilde{GL}^\pm}$ sur B de groupe structural $\widetilde{GL}_n^\pm(\mathbb{R})$ et d'un morphisme de fibrés $P_{\widetilde{GL}^\pm} \rightarrow R_V$, revêtement double équivariant pour les actions de $GL_n(\mathbb{R})$ et $\widetilde{GL}_n^\pm(\mathbb{R})$.

Remarque 2.1. — La définition que nous donnons ici ne diffère que peu de la définition usuelle des structures Pin^\pm utilisant les groupes $O_n(\mathbb{R})$ et $\text{Pin}_n^\pm(\mathbb{R})$ (voir par exemple [14]) au lieu de $GL_n(\mathbb{R})$ et $\widetilde{GL}_n^\pm(\mathbb{R})$, car $GL_n(\mathbb{R})$ se rétracte sur $O_n(\mathbb{R})$. Nous avons une correspondance naturelle entre les structures Pin^\pm et \widetilde{GL}_n^\pm . Ceci nous permet donc de parler de structures Pin^\pm sans se soucier de fixer de métrique sur les fibrés considérés.

Pour terminer, notons que l'obstruction à l'existence d'une structure Pin^+ (resp. Pin^-) sur le fibré V est donnée par la classe caractéristique $w_2(V)$ (resp. $w_2(V) + w_1^2(V)$) (voir [14]).

Les fibrés $(\mathbb{R}N)_i$ ayant pour bases des cercles, nous avons $w_2((\mathbb{R}N)_i) = w_1^2((\mathbb{R}N)_i) = 0$. Ils admettent donc un ensemble de structures Pin^\pm que nous noterons $\text{Pin}^\pm((\mathbb{R}N)_i)$. Ces ensembles sont des espaces affines sur $H^1((\mathbb{R}\Sigma_g)_i, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (voir [14]).

D'autre part, les éléments de $\mathbb{R}SL(N)$ agissent sur ces structures par tiré-en-arrière : pour $\Phi \in \mathbb{R}SL(N)$, P et P' deux structures Pin^\pm sur $(\mathbb{R}N)_i$, nous avons $\Phi^*(P') = P$ s'il existe un morphisme $\tilde{\Phi} : P \rightarrow P'$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & P' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_{(\mathbb{R}N)_i} & \xrightarrow{\Phi|_{(\mathbb{R}N)_i}} & R_{(\mathbb{R}N)_i}. \end{array}$$

Cette action est en fait une action par translation sur $\text{Pin}^\pm((\mathbb{R}N)_i)$ et fournit un morphisme

$$\tau : \mathbb{R}SL(N) \rightarrow H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k.$$

Nous rappelons enfin le lemme suivant (voir [21], Lemme 2.6) qui relie l'action des automorphismes réels de N sur les structures Pin^\pm de $\mathbb{R}N$ et les classes d'homotopie de leurs restriction à $\mathbb{R}N$.

Lemme 2.1. *Les applications rest_2 et τ sont égales.* □

- Plus généralement, si M est un fibré vectoriel réel de rang au moins 2 sur un cercle, alors
- lorsque M n'est pas orientable, il y a exactement deux classes d'homotopie d'automorphismes de déterminant 1 de M ; l'une (celle de l'identité) préserve les structures Pin^\pm de M l'autre les échange.
 - lorsque M est orientable et de rang au moins 3, il y a exactement deux classes d'homotopie d'automorphismes de déterminant 1 de M ; l'une préserve les structures Pin^\pm de M l'autre les échange.
 - lorsque M est orientable et de rang 2, les classes d'homotopie d'automorphismes de déterminant 1 de M sont toutes multiples de celle provenant d'un générateur de $\pi_1(SO_2(\mathbb{R}))$; les multiples pairs préservent les structures Pin^\pm de M , les multiples impairs les échangent.

2.2 Action des automorphismes réels de déterminant 1 sur les orientations du fibré déterminant

Prenons tout d'abord une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ qui sera fixée pendant tout ce paragraphe.

Nous allons établir le Lemme 2.2 avant de démontrer le Théorème 2.1. Si (L, c_L) est un fibré en droites holomorphe muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , nous noterons $\mathcal{M}(L)_{+1}$ l'espace des sections méromorphes de L qui sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes. Pour une telle section $\sigma \in \mathcal{M}(L)_{+1}$, nous noterons respectivement $\text{div}_0(\sigma)$ et $\text{div}_\infty(\sigma)$ les diviseurs de zéros et de pôles de σ .

Si (M, c_M) est un autre fibré en droites holomorphe sur (Σ_g, c_Σ) alors une section $\sigma \in \mathcal{M}(M \otimes L^*)_{+1}$ définit un nouveau fibré en droites holomorphe $(F_\sigma = \text{graphe}(\sigma), c_F)$ de la façon suivante. Si on note $U_{0,\sigma} = \Sigma_g - \text{div}_\infty(\sigma)$ et $U_{\infty,\sigma} = \Sigma_g - \text{div}_0(\sigma)$, alors

$$F|_{U_0} = \{(v, \sigma(v)), v \in L\} \subset L \oplus M, \quad F|_{U_\infty} = \{(\sigma^*(w), w), w \in M\} \subset L \oplus M.$$

Ici σ^* est l'élément de $\mathcal{M}(L \otimes M^*)_{+1}$ vérifiant $\sigma^*\sigma = 1$. D'autre part, $F_\sigma \subset L \oplus M$ est naturellement muni de sa structure réelle c_F venant de celle de $L \oplus M$. On remarque de plus que

$$\begin{aligned} F_x &= L_x, \text{ quand } x \in \text{div}_0(\sigma) \\ F_x &= M_x, \text{ quand } x \in \text{div}_\infty(\sigma). \end{aligned}$$

Pour tout supplémentaire complexe (non nécessairement holomorphe) $(G, c_G) \subset (L \oplus M, c_{L \oplus M})$ de F_σ , on note respectivement r_{F_σ}, r_L, r_M les réflexions par rapport à G, M, L et d'axes F_σ, L, M , et $t_{L,\sigma} = r_{F_\sigma} \circ r_L$, $t_{M,\sigma} = r_{F_\sigma} \circ r_M$. Les classes d'homotopie de $t_{L,\sigma}$ et $t_{M,\sigma}$ ne dépendent pas du choix de (G, c_G) .

Le lemme suivant étudie un cas particulier de l'action qui nous intéresse.

Lemme 2.2. *Soient (L, c_L) et (M, c_M) deux fibrés en droites holomorphes munis de structures réelles sur (Σ_g, c_Σ) . Fixons $\sigma \in \mathcal{M}(M \otimes L^*)_{+1}$, et $(F_\sigma = \text{graphe}(\sigma), c_F) \subset (L \oplus M, c_{L \oplus M})$. Choisissons un supplémentaire complexe (G, c_G) de F_σ . On a alors :*

- (i) $t_{L,\sigma}$ (resp. $t_{M,\sigma}$) préserve les orientations du fibré $\text{Det}(L \oplus M)$ si et seulement si $\deg(L) - \deg(F_\sigma)$ (resp. $\deg(M) - \deg(F_\sigma)$) est pair.
- (ii) $\deg(L) = \deg(F_\sigma) + \text{card}(\text{div}_\infty(\sigma))$ et $\deg(M) = \deg(F_\sigma) + \text{card}(\text{div}_0(\sigma))$.
- (iii) $(\text{rest}_2)_i(t_{L,\sigma}) = \text{card}(\text{div}_\infty(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \mod 2$ et $(\text{rest}_2)_i(t_{M,\sigma}) = \text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \mod 2$.

Remarquons avant de le démontrer que ce lemme implique le Théorème 2.1 pour les automorphismes $t_{F,\sigma}$ et $t_{M,\sigma}$. Ces trois points nous assurent en effet que les automorphismes $t_{L,\sigma}$ et $t_{M,\sigma}$ préservent les orientations du fibré $\text{Det}(L \oplus M)$ si et seulement si $\sum_{i=1}^k (\text{rest}_2)_i(t_{L,\sigma})$ et $\sum_{i=1}^k (\text{rest}_2)_i(t_{M,\sigma})$ sont pairs. En appliquant le Lemme 2.1 nous obtenons le Théorème 2.1 dans ce cas.

Démonstration. (i) Nous démontrons ce premier point seulement pour $t_{L,\sigma}$, le résultat pour $t_{M,\sigma}$ se traitant de façon tout à fait analogue. Notons $\bar{\partial}_L$ (resp. $\bar{\partial}_{L \oplus M}$) l'opérateur de Cauchy-Riemann sur L (resp. sur $L \oplus M$) associé à la structure holomorphe du fibré (voir [15]). L'automorphisme $-1 : L \rightarrow L$ fixe l'opérateur $\bar{\partial}_L$ et agit sur la droite $\text{Det}(\bar{\partial}_L)$ par multiplication par $(-1)^{\dim(\ker(\bar{\partial}_L)) + \dim(\text{coker}(\bar{\partial}_L))}$. Ainsi, l'automorphisme $r_L : L \oplus M \rightarrow L \oplus M$ fixe l'opérateur $\bar{\partial}_{L \oplus M}$ et agit sur la droite $\text{Det}(\bar{\partial}_{L \oplus M}) = \text{Det}(\bar{\partial}_L) \otimes \text{Det}(\bar{\partial}_M)$ par multiplication par $(-1)^{\dim(\ker(\bar{\partial}_L)) + \dim(\text{coker}(\bar{\partial}_L))}$. Donc r_L préserve les orientations de la droite $\text{Det}(\bar{\partial}_{L \oplus M})$ (et donc du fibré $\text{Det}(L \oplus M)$) si et seulement si $\dim(\ker(\bar{\partial}_L)) + \dim(\text{coker}(\bar{\partial}_L))$ est pair. Or, le Théorème de Riemann-Roch affirme que $\dim(\ker(\bar{\partial}_L)) - \dim(\text{coker}(\bar{\partial}_L)) = \deg(L) + 1 - g$.

Fixons ensuite un opérateur de Cauchy-Riemann réel $\bar{\partial}_G$ sur G et appliquons le même raisonnement que précédemment aux fibrés F_σ et G . Nous voyons alors que l'automorphisme r_{F_σ} préserve les orientations de la droite $\text{Det}(\bar{\partial}_{F_\sigma}) \otimes \text{Det}(\bar{\partial}_G)$ (et donc du fibré $\text{Det}(F_\sigma \oplus G) = \text{Det}(L \oplus M)$) si et seulement si $\deg(F_\sigma) + 1 - g$ est pair.

Ainsi, l'automorphisme $t_{L,\sigma} = r_{F_\sigma} \circ r_L$ préserve les orientations du fibré $\text{Det}(L \oplus M)$ si et seulement si $\deg(L) + \deg(F_\sigma) + 2 - 2g$ est pair. D'où le premier point.

- (ii) Soit une section $\sigma_L \in \mathcal{M}(L)_{+1}$ telle que ses pôles et zéros soient disjoints de ceux de σ . Posons $\sigma_F = (\sigma_L, \sigma(\sigma_L)) \in \mathcal{M}(F)_{+1}$, et notons $pr_M : L \oplus M \rightarrow M$ la projection naturelle. Alors

$$\begin{aligned} \text{div}_0(\sigma_L) &= \text{div}_0(\sigma_F) \\ \text{div}_\infty(\sigma_L) &= \text{div}_\infty(\sigma_F) - \text{div}_\infty(\sigma) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{div}_0(pr_M(\sigma_F)) &= \text{div}_0(\sigma_F) + \text{div}_0(\sigma) \\ \text{div}_\infty(pr_M(\sigma_F)) &= \text{div}_\infty(\sigma_F). \end{aligned}$$

D'où en soustrayant ces égalités, $\deg(L) = \deg(F_\sigma) + \text{card}(\text{div}_\infty(\sigma))$ et $\deg(M) = \deg(F_\sigma) + \text{card}(\text{div}_0(\sigma))$.

- (iii) Nous distinguons deux cas, suivant que $(\mathbb{R}L \oplus \mathbb{R}M)_i$ est orientable ou non.

Si $(\mathbb{R}L \oplus \mathbb{R}M)_i$ est orientable, on le trivialise. Les automorphismes $t_{L,\sigma}$ et $t_{M,\sigma}$ induisent alors deux lacets dans $SL_2(\mathbb{R})$. On calcule $(\text{rest}_2)_i(t_{L,\sigma})$ et $(\text{rest}_2)_i(t_{M,\sigma})$ en comptant la parité des classes d'homotopie des lacets précédents dans $\pi_1(SL_2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$. Or ces parités se mesurent en comptant le nombre de demi-tours que fait $(\mathbb{R}F)_i$ respectivement par rapport à $(\mathbb{R}L)_i$ et $(\mathbb{R}M)_i$. En effet, en prenant une trivialisation telle que $(\mathbb{R}L)_i$ et $(\mathbb{R}M)_i$ soient orthogonaux, et en homotopant $(\mathbb{R}G)_i$ sur l'orthogonal de $(\mathbb{R}F_\sigma)_i$ ces deux lacets dans $SL_2(\mathbb{R})$ sont en fait homotopes à des lacets de rotations d'angles égaux respectivement au double de l'angle entre $(\mathbb{R}L)_i$ et $(\mathbb{R}F_\sigma)_i$ et au double de l'angle entre $(\mathbb{R}M)_i$ et $(\mathbb{R}F_\sigma)_i$.

Nous avons donc $(\text{rest}_2)_i(t_{L,\sigma}) = \text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \bmod 2$ et $(\text{rest}_2)_i(t_{M,\sigma}) = \text{card}(\text{div}_\infty(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \bmod 2$. On conclut en remarquant que dans ce cas $\text{card}(\text{div}_\infty(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) = \text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \bmod 2$.

Si maintenant $(\mathbb{R}L \oplus \mathbb{R}M)_i$ n'est pas orientable, deux cas se présentent :

- soit on peut homotoper le fibré $(\mathbb{R}F)_i$ sur le fibré $(\mathbb{R}L)_i$ (si $\text{card}(\text{div}_\infty(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) = 0 \pmod 2$) et alors, d'après le Lemme 1.3, $(\text{rest}_2)_i(t_{L,\sigma}) = (\text{rest}_2)_i(\text{id}) = 0 = \text{card}(\text{div}_\infty(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \pmod 2$ et $(\text{rest}_2)_i(t_{M,\sigma}) = (\text{rest}_2)_i(-\text{id}) = 1 = \text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \pmod 2$.
- soit on peut homotoper $(\mathbb{R}F)_i$ sur $(\mathbb{R}M)_i$ (si $\text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) = 0 \pmod 2$) et alors $(\text{rest}_2)_i(t_{L,\sigma}) = (\text{rest}_2)_i(-\text{id}) = 1 = \text{card}(\text{div}_\infty(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i}))$ et $(\text{rest}_2)_i(t_{M,\sigma}) = (\text{rest}_2)_i(\text{id}) = 0 = \text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i}))$.

Ce qui conclut la démonstration du troisième point. \square

Démonstration du Théorème 2.1. Remarquons tout d'abord qu'il nous suffit de traiter le cas $\text{rg}(N) = 2$. En effet, pour tout sous-fibré $(N', c_{N'})$ de N de rang 2, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}SL(N') & \rightarrow & \mathbb{R}SL(N) \\ \tilde{t} & \mapsto & \tilde{t} \oplus \text{id} \end{array}$$

commute avec τ_N et $\tau_{N'}$ et induit une surjection au niveau des classes d'homotopie.

Supposons donc que $\text{rg}(N) = 2$ et prenons $t \in \mathbb{R}SL(N)$. Fixons de plus un opérateur de Cauchy-Riemann induisant une structure holomorphe sur N faisant de ce dernier un fibré vectoriel holomorphe décomposable en une somme de deux fibrés en droites holomorphes (L, c_L) et (M, c_M) .

Prenons $\sigma_{M \otimes L^*}$ une section méromorphe et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante de $M \otimes L^*$. Pour toute fonction méromorphe f sur Σ_g , on obtient une nouvelle section $\sigma = f\sigma_{M \otimes L^*}$ dont on contrôle la parité des pôles et des zéros sur chaque composante réelle de Σ_g en modifiant les pôles et les zéros de f . On peut en effet considérer f comme section holomorphe d'un fibré $\mathcal{O}_\Sigma(x_1 + \dots + x_n)$ (pour n assez grand) où l'on place les points x_i sur $\mathbb{R}\Sigma_g$ pour changer à volonté la parité de ses zéros et pôles (qui est la même sur chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$). En particulier, prenons f de telle sorte que $(\text{rest}_2)_i(t) = \text{card}(\text{div}_0(\sigma|_{\mathbb{R}\Sigma_i})) \pmod 2$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Le Lemme 2.2 nous assure alors que $\text{rest}_2(t) = \text{rest}_2(t_{L,\sigma})$, donc t et $t_{L,\sigma}$ ont même action sur les structures Pin^\pm sur $\mathbb{R}N$ d'après le Lemme 2.1. D'autre part, l'action d'un automorphisme sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ ne dépend que de son image par rest_2 et non par rest . La conclusion du Théorème découle ainsi du Lemme 2.2. \square

2.3 Lacets d'opérateurs de Cauchy-Riemann et structures Pin^\pm

Nous décrivons ici l'orientabilité du fibré déterminant au-dessus de certains lacets d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels. Pour ce faire, supposons fixée une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Considérons une famille $N_z \rightarrow \mathbb{C}P^1$, $z \in \mathbb{C}P^1$, de fibrés vectoriels complexes sur (Σ_g, c_Σ) . Nous supposerons de plus que les fibrés N_z admettent des structures réelles c_{N_z} lorsque z est dans $\mathbb{R}P^1$.

Nous disposons donc de k familles $(\mathbb{R}N_z)_i$, $z \in \mathbb{R}P^1$, de fibrés vectoriels réels sur $\mathbb{R}\Sigma_g$. À $z \in \mathbb{R}P^1$ fixé, chacun de ces fibrés $(\mathbb{R}N_z)_i$ admet une structure Pin^\pm ; toutefois, lorsque z varie, il n'est pas garanti qu'il existe une famille continue de telles structures sur tout $\mathbb{R}P^1$. Si c'est le cas, nous dirons que la famille $(\mathbb{R}N_z)_i$ admet une structure Pin^\pm .

Si nous prenons maintenant un lacet $(\bar{\partial}_z)_{z \in \mathbb{R}P^1}$ d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels sur $(N_z, c_{N_z})_{z \in \mathbb{R}P^1}$, nous obtenons naturellement un fibré en droites réelles $\text{Det}(\bar{\partial}_z) \rightarrow \mathbb{R}P^1$. Nous dirons que le lacet $(\bar{\partial}_z)_{z \in \mathbb{R}P^1}$ est orientable si le fibré $\text{Det}(\bar{\partial}_z)$ est orientable.

Exemple 2.1. — Un exemple de tel lacet est obtenu de la façon suivante. Considérons une extension $0 \rightarrow (F, c_F) \rightarrow (M, c_M) \rightarrow (G, c_G) \rightarrow 0$, où F, G (resp. M) sont des fibrés en droites (resp. de rang 2) holomorphes sur Σ_g . Celle-ci admet une classe d'extension $\mu \in$

$H^1(\Sigma_g, F \otimes G^*)_{+1}$. Comme $H^1(\Sigma_g, F \otimes G^*)_{+1} = \Gamma(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes (F \otimes G^*))_{+1} / \text{im}(\bar{\partial}_{F \otimes G^*})_{+1}$, on notera $\tilde{\mu}$ un représentant de μ dans $\Gamma(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes (F \otimes G^*))_{+1}$. La classe μ induit une déformation $(N_z)_{z \in \mathbb{C}}$, de fibre exceptionnelle $N_0 = F \oplus G$ et trivialisable sur \mathbb{C}^* , de fibre générique $N_z \cong M$, $z \in \mathbb{C}^*$. Cette déformation s'étend donc à tout $\mathbb{C}P^1$, et on obtient un lacet d'opérateurs donnés par $\bar{\partial}_x = \begin{pmatrix} \bar{\partial}_F & x\mu \\ 0 & \bar{\partial}_G \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. L'orientabilité de ce lacet est alors décrite par le Théorème 2.2.

Le résultat suivant donne une condition topologique sur l'orientabilité des lacets d'opérateurs considérés (comparer avec la Proposition 8.1.7 de [8]).

Théorème 2.2. *Fixons une structure complexe J sur (Σ_g, c_Σ) . Soit $N_z \rightarrow \mathbb{C}P^1$, $z \in \mathbb{C}P^1$, une famille de fibrés vectoriels complexes de rang au moins 2 sur (Σ_g, c_Σ) admettant des structures réelles c_{N_z} lorsque $z \in \mathbb{R}P^1$. Supposons de plus qu'il existe un point réel $p \in \mathbb{R}\Sigma_g$ tel que le fibré $(\mathbb{R}N_z)_p$ sur $\mathbb{R}P^1$ soit orientable. Alors, un lacet $(\bar{\partial}_z)_{z \in \mathbb{R}P^1}$ d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels sur $(N_z)_{z \in \mathbb{R}P^1}$ est orientable si et seulement si les familles $(\mathbb{R}N_z)_i$ qui n'admettent pas de structure Pin^\pm sont en nombre pair.*

Faisons tout d'abord quelques remarques préliminaires à la démonstration de ce Théorème. Fixons les deux ouverts de cartes affines $0 \in U_0$ et $\infty \in U_1$ de $\mathbb{C}P^1$. Les familles $(N_z, c_{N_z}) \rightarrow \mathbb{R}P^1$, $z \in \mathbb{R}P^1$, de fibrés vectoriels complexes munis de structures réelles sur (Σ_g, c_Σ) sont classifiées par $H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}GL(N))$ (où $(N_z, c_{N_z}) \cong (N, c_N)$ pour $z \in \mathbb{R}P^1$). Une telle famille est donnée par une application de recollement

$$\begin{cases} \mathbb{R}U_0 \cap \mathbb{R}U_1 \times N & \rightarrow \mathbb{R}U_0 \cap \mathbb{R}U_1 \times N \\ (z, \xi) & \mapsto (z, t_z(\xi)) \end{cases}$$

où $t_z = \text{id}_N$ pour $z > 0$ et $t_z \in \mathbb{R}GL(N)$ pour $z < 0$. Toutefois, si l'on impose que cette famille s'étende sur tout $\mathbb{C}P^1$, il faut que t_z pour $z < 0$ soit homotope dans $GL(N)$ à id_N , et on obtient alors un prolongement donné par l'application de recollement

$$\begin{cases} U_0 \cap U_1 \times N & \rightarrow U_0 \cap U_1 \times N \\ (z, \xi) & \mapsto (z, t_z(\xi)) \end{cases}$$

où $(t_z)_{z \in \mathbb{C}^*}$ est une famille d'éléments de $GL(N)$ prolongeant $(t_z)_{z \in \mathbb{R}^*}$. Or, l'existence d'une telle homotopie est équivalente à ce que le déterminant $\det(t_z) \in \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ soit homotope à la fonction constante 1 dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^*$. Si nous supposons de plus qu'il existe un point réel $p \in \mathbb{R}\Sigma_g$ tel que le fibré $(\mathbb{R}N_z)_p$ sur $\mathbb{R}P^1$ soit orientable alors forcément $\det(t_z)$ pour $z < 0$ est homotope dans $\mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ à la fonction constante égale à 1.

Nous pouvons ainsi supposer que les familles considérées sont données par des applications de transition qui, restreintes à $\mathbb{R}P^1$ sont dans $\mathbb{R}SL(N)$.

Démonstration du Théorème 2.2. Prenons une famille $N_z \rightarrow \mathbb{C}P^1$ de fibrés vectoriels complexes sur (Σ_g, c_Σ) comme décrit dans l'énoncé du Théorème 2.2. Elle est donnée par une application de recollement

$$\begin{cases} U_0 \cap U_1 \times N & \rightarrow U_0 \cap U_1 \times N \\ (z, \xi) & \mapsto (z, t_z(\xi)) \end{cases}$$

où lorsque $z \in \mathbb{R}^*$, $t_z = \text{id}_N$ pour $z > 0$ et $t_z \in \mathbb{R}SL(N)$ pour $z < 0$.

D'une part, une des familles $(\mathbb{R}N_z)_i$, $z \in \mathbb{R}P^1$, admet une structure Pin^\pm si et seulement si les t_z , $z \in \mathbb{R}^*$, agissent trivialement sur les structures Pin^\pm sur $(\mathbb{R}N)_i$.

D'autre part, le fibré déterminant associé à un lacet $(\bar{\partial}_z)_{z \in \mathbb{R}P^1}$ d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels sur $(N_z)_{z \in \mathbb{R}P^1}$ est donné par les changements de cartes

$$\begin{cases} U_0 \cap U_1 \cap \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R} & \rightarrow & U_0 \cap U_1 \cap \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R} \\ (z, v) & \mapsto & (z, t_z.v). \end{cases}$$

Le Théorème 2.1 nous assure alors que ce fibré est orientable si et seulement si le nombre de composantes de $\mathbb{R}N$ dont les structures Pin^\pm sont échangées sous l'action de t_z est pair. Ce qui conclut la démonstration de Théorème 2.2. \square

3 Étude des automorphismes réels au-dessus de l'identité

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'action des éléments de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$. Remarquons tout d'abord qu'un élément de $\mathbb{R}GL(N)$ induit une permutation sur l'ensemble à $2k$ éléments formé des structures Pin^\pm des composantes de $\mathbb{R}N$. Nous noterons $\varepsilon_{\mathbf{p}^\pm} : \mathbb{R}GL(N) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le morphisme qui calcule la signature de cette permutation.

Lemme 3.1. *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe sur (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide. L'action d'un automorphisme $f \in \mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est la même que celle de $\det(f) \in \mathbb{R}GL(\det(N))$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$ si et seulement si $\varepsilon_{\mathbf{p}^\pm}(f) = 1$.*

Démonstration. D'après le Lemme 1.1 nous avons un isomorphisme

$$(N, c_N) \cong (\det(N), c_{\det(N)}) \oplus (\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}, \text{conj}). \quad (*)$$

Ainsi, un élément $f \in \mathbb{R}GL(N)$ se décompose sous l'isomorphisme $(*)$ en

$$f = (\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}}) \circ ((\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}})^{-1} \circ f).$$

Donc le signe de l'action de f sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ est donné par le produit de l'action de $(\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}})$ de $(\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}})^{-1} \circ f$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N) \oplus \underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1})$.

D'autre part, on remarque (voir [14]) que $(\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}})$ agit trivialement sur les structures Pin^\pm sur les $(\mathbb{R}N)_i$, donc $\varepsilon_{\mathbf{p}^\pm}((\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}}) \circ f) = \varepsilon_{\mathbf{p}^\pm}(f)$. L'automorphisme $(\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}}) \circ f$ est un élément de $\mathbb{R}SL(N)$ donc d'après le Théorème 2.1, le signe de son action sur les orientations de $\text{Det}(\det(N) \oplus \underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1})$ est donné par $\varepsilon_{\mathbf{p}^\pm}(f)$.

Enfin, étudier le signe de l'action de l'automorphisme $(\det(f) \oplus \text{id}_{\underline{\mathbb{C}}^{\text{rg}(N)-1}})$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$ est égal à celui de l'action de $\det(f)$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$. \square

Notons $s_N : \mathbb{R}GL(N) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le morphisme associant à $f \in \mathbb{R}GL(N)$ le signe de l'action de $\det(f)$ sur les orientations de $\text{Det}(\det(N))$. Pour résumer le Lemme 3.1 en reprenant la

suite exacte (1) du Lemme 1.2, nous avons la situation suivante

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{R}SL(N) & \longrightarrow & \mathbb{R}GL(N) & \longrightarrow & \mathbb{R}GL(\det(N)) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \epsilon_{\mathbb{P}^\pm} & & \downarrow \epsilon_{\mathbb{P}^\pm} \downarrow s_N & & \downarrow s_N \\
& & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
& & & & \downarrow \text{augm} & & \\
& & & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & &
\end{array}$$

où $\text{augm}: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le morphisme d'augmentation et chaque morphisme vertical calcule le signe de l'action des différents groupes d'automorphismes sur les orientations des fibrés déterminants.

Pour terminer la démonstration du Théorème B il ne nous reste plus qu'à étudier le signe s_N . Nous supposons pour cela à partir de maintenant que N est de rang 1. Les éléments de $\mathbb{R}GL(N)$ s'identifient alors canoniquement aux fonctions

$$\mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) = \{f : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{C}^* \mid \overline{f \circ c_\Sigma} = f\}.$$

Nous noterons $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ sur Σ_g à valeurs dans \mathbb{C}^* , $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes, prises à homotopie près.

Cette section est divisée en trois parties. Dans un premier temps, nous étudions l'action des automorphismes réels sur les structures *Spin* réelles de (Σ_g, c_Σ) . Dans un deuxième temps, nous relient cette dernière action à celle sur les orientations du fibré déterminant et démontrons le Théorème B pour un fibré en droites (voir §3.2). Nous obtenons alors comme au paragraphe précédent une interprétation topologique de l'action de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$.

Nous terminons en déduisant la première classe de Stiefel-Whitney du fibré induit par le fibré déterminant sur le groupe de Picard réel d'une courbe (Σ_g, c_Σ) .

3.1 Automorphismes réels et structures *Spin* réelles

Nous exposons dans ce paragraphe quelques préliminaires algébriques et topologiques à l'étude de l'action des éléments de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$. Nous commençons par expliciter la structure du groupe $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$. Puis, nous rappelons quelques notions à propos des structures *Spin* réelles sur une courbe réelle. Nous décrivons enfin l'action des éléments de $\mathbb{R}GL(N)$ sur ces structures. Rappelons aussi que toutes les courbes réelles que nous considérons sont de partie réelle non vide.

3.1.1 Structure de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$

Rappelons tout d'abord quelques résultats sur la topologie des courbes réelles (voir par exemple [18] et [19]). Si $\Sigma_g \setminus \mathbb{R}\Sigma_g$ a deux composantes connexes, nous dirons que la courbe réelle est séparante. On rappelle que lorsque la courbe est séparante $k = b_0(\mathbb{R}\Sigma_g)$ est congru à $g+1$ modulo 2. On pose dans ce cas $m = \frac{g+1-k}{2}$, qui est le genre d'une des composantes de $\Sigma_g - \mathbb{R}\Sigma_g$.

Définition 3.1 (voir [19] et Figure 1). *On suppose que $\mathbb{R}\Sigma_g$ est non vide, et soit $p \in \mathbb{R}\Sigma_g$. Une base symplectique réelle de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ est une base symplectique $(a_i, b_i)_{i=1\dots g}$ vérifiant de plus*

si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante :

1. $(c_\Sigma)_*(a_i) = a_i, i = 1, \dots, g$
2. $(c_\Sigma)_*(b_i) = -b_i, i = 1, \dots, k - 1$
3. $(c_\Sigma)_*(b_i) = -b_i + a_i, i = k, \dots, g$
4. p se trouve sur la composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$ homologue à $\sum_{i=1}^g a_i$

si (Σ_g, c_Σ) est séparante :

1. $(c_\Sigma)_*(a_i) = a_i, i = 1, \dots, k - 1$
2. $(c_\Sigma)_*(b_i) = -b_i, i = 1, \dots, k - 1$
3. $(c_\Sigma)_*(a_i) = a_{i+m}, i = k, \dots, k + m - 1$
4. $(c_\Sigma)_*(b_i) = -b_{i+m}, i = k, \dots, k + m - 1$
5. p se trouve sur la composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$ homologue à $\sum_{i=1}^{k-1} a_i$.

L'existence d'une telle base est démontrée par Natanzon dans [19].

Nous allons décrire une famille \mathcal{B} génératrice d'éléments de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$, ce qui nous sera utile par la suite. Pour cela, fixons une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ en imposant de plus que les éléments de cette base soient représentés par des courbes simples disjointes lorsque c'est possible, que $a_i = [\mathbb{R}\Sigma_g]_i$ pour $i \in \{1, \dots, k - 1\}$, et que pour une courbe séparante, les courbes a_k, \dots, a_g soient globalement stables par c_Σ . Nous numérote-rons de plus $(\mathbb{R}\Sigma_g)_0$ la composante sur laquelle se trouve p (voir Figure 1).

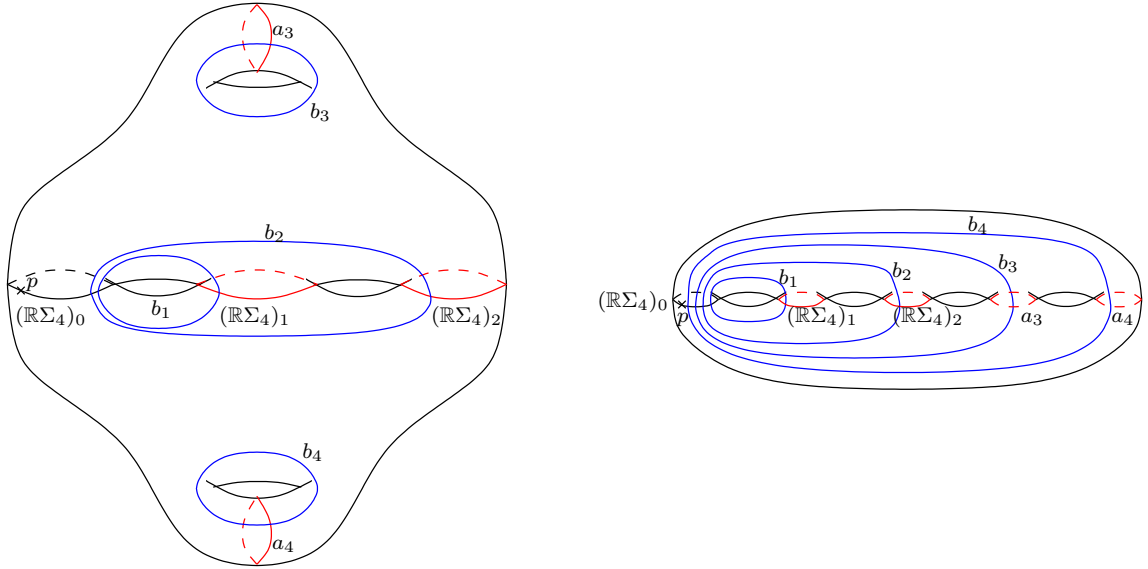


FIGURE 1 – Une base symplectique réelle pour $g = 4$, (Σ_4, c_Σ) séparante et $k = 3$ à gauche et $g = 4$, (Σ_4, c_Σ) non séparante et $k = 2$ à droite

Remarquons qu'une fois fixée une telle base symplectique, les composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sont orientées.

Construisons maintenant la famille génératrice \mathcal{B} :

si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante : On commence par choisir des petits voisinages tubulaires $A_i \subset \Sigma_g$, invariants par c_Σ , ayant pour âmes les courbes a_i , et disjoints les uns des autres. On choisit $t \in [-1, 1]$ une coordonnée transverse à a_i dans A_i de telle sorte que a_i soit la courbe de niveau $t = 0$, et $\theta \in a_i = S^1 \subset \mathbb{C}$ l'autre coordonnée. Nous imposons de plus que θ croît le long de a_i et que le difféomorphisme entre A_i et $S^1 \times [-1, 1]$ donné par les coordonnées (θ, t) préserve les orientations. On suppose aussi que dans ces coordonnées, la structure réelle s'écrit $c_\Sigma(t, \theta) = (-t, \theta)$ si $i = 0, \dots, k-1$ et $c_\Sigma(t, \theta) = (-t, -\theta)$ si $i = k, \dots, g$. On obtient alors les fonctions (à homotopie près) f_i , $i = 0, \dots, g$, réelles, en posant $f_i(t, \theta) = -e^{i\pi t}$ sur A_i et en prolongeant par 1 ailleurs (voir Figure 2).

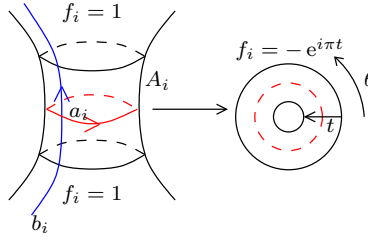


FIGURE 2 – Construction de f_i

si (Σ_g, c_Σ) est séparante : On procède de la même façon que précédemment pour obtenir k fonctions f_0, \dots, f_{k-1} associées aux k courbes a_0, \dots, a_{k-1} . On construit ensuite $g + 1 - k$ autres fonctions $f_k, g_k, \dots, f_{k+m-1}, g_{k+m-1}$ en définissant f_i (resp. g_i) de la même façon localement autour de a_i (resp. b_i) puis en prolongeant grâce à c_Σ au voisinage de a_{i+m} (resp. b_{i+m}) et par 1 ailleurs.

Nous montrons dans la suite que les éléments de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ sont, à peu de choses près, totalement déterminés par leurs indices le long des courbes dans Σ_g .

Lemme 3.2. *L'application de calcul d'indice*

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{ind}} : \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) &\rightarrow \mathbb{R} \text{Hom}(H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \\ f &\mapsto (c \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{df}{f}) \end{aligned}$$

pas au quotient en un morphisme

$$\text{ind} : [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)] \rightarrow H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1}.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que le changement d'espace d'arrivée est conséquence du théorème des coefficients universels et du calcul suivant : pour $f \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ et $c \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} ((c_\Sigma)^*(\widetilde{\text{ind}}(f)))(c) &= (\widetilde{\text{ind}}(f))((c_\Sigma)_*(c)) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(c_\Sigma)_*(c)} \frac{df}{f} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{d(f \circ c_\Sigma)}{f \circ c_\Sigma} \\ &= (\widetilde{\text{ind}}(f))(c) \\ &= -(\widetilde{\text{ind}}(f))(c). \end{aligned}$$

Puis, comme $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1}$ est discret, deux éléments de $\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ qui sont homotopes ont même indice, et ind passe bien au quotient. \square

Exemple 3.1. — Calculons les indices pour la famille \mathcal{B} ; l'exposant PD indique que nous prenons le dual de Poincaré de la classe de (co)homologie considérée. Nous avons les cas suivant :

- si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante : $\text{ind}(f_i) = (a_i)^{\text{PD}}$ pour $i = 1, \dots, g$.
- si (Σ_g, c_Σ) est séparante : $\text{ind}(f_i) = (a_i)^{\text{PD}}$ pour $i = 1, \dots, k-1$, $\text{ind}(f_i) = (a_i + a_{i+m})^{\text{PD}}$ et $\text{ind}(g_i) = (b_i - b_{i+m})^{\text{PD}}$ pour $i = k, \dots, k+m-1$.

Posons ensuite

$$\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0 := \{f \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) \mid \exists g : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{C}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-équivariante, } f = \exp(g)\}.$$

C'est donc l'ensemble des fonctions sur Σ_g qui admettent un logarithme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant.

Lemme 3.3. $\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0$ est la composante connexe de la fonction constante égale à 1 dans $\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$. Ainsi, on a

$$[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})] = \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) / \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0.$$

Démonstration. — $\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0$ est ouvert : si $f \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ et $g \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C})$ vérifient

$$|f - \exp(g)| < \frac{1}{2} \inf |\exp(g)|$$

alors

$$\left| \frac{f}{\exp(g)} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

donc il existe $h \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C})$ avec

$$\frac{f}{\exp(g)} = \exp(h).$$

De plus, $\exp(h|_{\mathbb{R}\Sigma}) \in \mathbb{R}_+^*$, et donc $h \circ c_\Sigma - \bar{h} = 4i\pi k$, pour un $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $f = \exp(h - 2i\pi k + g) \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0$.

— $\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0$ est fermé car

$$\mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) \setminus \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0 = \bigsqcup_{f \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) \setminus \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0} f \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0.$$

— Enfin, $1 \in \mathbb{RC}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)_0$.

□

Lemme 3.4. La suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{-1} [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})] \xrightarrow{\text{ind}} H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1} \rightarrow 0. \quad (*)$$

De plus, la famille \mathcal{B} engendre $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$.

Démonstration. — La surjectivité du morphisme ind provient directement de l'Exemple 3.1 : l'image de \mathcal{B} par ind engendre $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1}$.

— Si f est dans le noyau de ind, alors en particulier elle a le même signe sur chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$. Quitte à la multiplier par -1 , nous pouvons supposer que f est positive sur $\mathbb{R}\Sigma_g$. Montrons que la fonction f admet un logarithme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant.

Notons pour cela $\pi : \widetilde{\Sigma}_g \rightarrow \Sigma_g$ le revêtement universel de Σ_g . Comme $\widetilde{\Sigma}_g$ est simplement connexe, il existe $G : \widetilde{\Sigma}_g \rightarrow \mathbb{C}$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Sigma}_g & \xrightarrow{G} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & \searrow & \downarrow \exp \\ \Sigma_g & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^*. \end{array}$$

De plus, si $z, z' \in \widetilde{\Sigma}_g$ vérifient $\pi(z) = \pi(z')$, alors on a $G(z) = G(z')$. En effet, prenons un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \widetilde{\Sigma}_g$ reliant z à z' . On obtient un lacet $\pi \circ \gamma \in \pi_1(\Sigma_g, \pi(z))$ dont l'image par f est un lacet contractible dans \mathbb{C}^* car f est d'indice nul. Par définition, $G(z)$ et $G(z')$ ne diffèrent que par l'action de $f \circ \pi \circ \gamma \in \pi_1(\mathbb{C}^*)$ qui est nul. Ainsi $G(z) = G(z')$ et on en déduit qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C})$ telle que $\exp(g) = f$. De plus, comme f est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante et positive sur $\mathbb{R}\Sigma_g$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $g \circ c_\Sigma - \bar{g} = 4i\pi k$. Ainsi $g - 2i\pi k$ donne un logarithme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant de f .

D'après le Lemme 3.3, la classe de f dans $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ est donc celle de la fonction constante égale à 1.

Le noyau de ind est donc constitué des deux éléments 1 (qui admet un logarithme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant) et -1 (qui admet un logarithme qui n'est pas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant). \square

Remarque 3.1. — La démonstration du Lemme 3.4 montre même que la suite (*) est scindée. En fait nous avons un isomorphisme non canonique

$$[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)] \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]_{+a_0} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1}$$

où $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]_{+a_0}$ est le sous groupe de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ composé des fonctions positives sur la composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_0$. Si on place le point $p \in \mathbb{R}\Sigma_g$ sur une autre composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$, nous obtenons l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1} & \rightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1} \\ (\epsilon, \alpha) & \mapsto & (\epsilon + \alpha(b_i), \alpha). \end{array}$$

3.1.2 Structures *Spin* réelles sur (Σ_g, c_Σ)

Nous rappelons quelques faits à propos des structures *Spin* sur Σ_g (voir [2], [13], [16] et [19] par exemple) Nous supposons que (Σ_g, c_Σ) est munie d'une métrique riemannienne réelle, que son genre g est au moins 1, et que $\mathbb{R}\Sigma_g \neq \emptyset$. Le choix de la métrique n'influe pas sur les résultats que nous allons énoncer, pour la même raison mentionnée dans la Remarque 2.1.

Notons R_Σ^+ le fibré principal des repères orthonormés directs du fibré tangent à Σ_g . Ce fibré a pour groupe $SO_2(\mathbb{R})$; celui-ci admet un revêtement double non trivial $Spin(2)$ (voir [1]). Une structure *Spin* sur Σ_g est la donnée d'une classe d'isomorphisme de paires composées d'un fibré principal $\pi : P_{Spin} \rightarrow \Sigma_g$ de groupe $Spin(2)$ et d'un morphisme de fibrés $P_{Spin} \rightarrow R_\Sigma^+$ équivariant pour les actions de $SO_2(\mathbb{R})$ et $Spin(2)$. L'obstruction à l'existence d'une telle structure *Spin* est donnée par la seconde classe de Stiefel-Whitney de

la surface. Or comme celle-ci est orientable, sa caractéristique d'Euler est paire. Nous avons donc $w_2(T\Sigma_g) = 0$, et la surface admet une structure *Spin*.

Les structures *Spin* sur Σ_g forment un ensemble $Spin(\Sigma_g)$ qui est en bijection avec les éléments de $H^1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ non triviaux dans les fibres. Plus précisément, la suite spectrale de Leray-Serre associée à la fibration $SO_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{i} R_\Sigma^+ \xrightarrow{\pi} \Sigma_g$ donne :

$$0 \rightarrow H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^1(SO_2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (*)$$

et $Spin(\Sigma_g) = \{\zeta \in H^1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \mid i^*(\zeta) \neq 0\}$. C'est un espace affine sur $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

On note $z \in H_1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ la classe de la fibre. Johnson dans [13] affirme alors que pour tout $a \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on a un relevé canoniquement associé $\tilde{a} \in H_1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Si a s'écrit comme une somme de courbes simples a_i , $1 \leq i \leq m$, on note alors \vec{a}_i les éléments de $H_1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ induits par les champs de vecteurs tangents unitaires de ces courbes, et on pose $\tilde{a} = \sum_{i=1}^m \vec{a}_i + mz$. Toutefois, ce relevé ne scinde pas la suite duale à (*). En effet, si on note \bullet le produit d'intersection sur $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, nous avons

$$\widetilde{a+b} = \tilde{a} + \tilde{b} + (a \bullet b)z.$$

Cette dernière égalité nous fournit une identification entre structures *Spin* sur Σ_g et formes quadratiques sur $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en associant à $\zeta \in Spin(\Sigma_g)$ l'application

$$\begin{aligned} q_\zeta : H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ a &\mapsto \langle \zeta, \tilde{a} \rangle \end{aligned}$$

où le crochet de dualité est donné par $H^1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = Hom(H_1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (coefficients universels).

D'autre part, comme remarqué par Atiyah [2], étant fixée une structure complexe sur Σ_g , ses structures *Spin* sont aussi en correspondance avec l'ensemble $S(\Sigma_g)$ des racines carrées holomorphes du fibré canonique K_Σ . Si ζ est un élément de $Spin(\Sigma_g)$, on notera L_ζ l'élément de $S(\Sigma_g)$ associé de la façon suivante. La structure ζ vue comme élément de $H^1(R_\Sigma^+, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ correspond à un revêtement double (à isomorphisme près) du $U_1 = SO_2(\mathbb{R})$ fibré principal R_Σ^+ dont la restriction à la fibre est $z \in U_1 \mapsto z^2 \in U_1$, et donc à un fibré en droites complexes L_ζ et un isomorphisme $\alpha : L_\zeta^2 \rightarrow K_\Sigma$ (à isomorphisme près). Le fibré L_ζ hérite alors d'une structure holomorphe rendant α holomorphe. L'ensemble $S(\Sigma_g)$ admet de plus une forme quadratique naturelle (voir [2] ou [10]).

Théorème 3.1 (Relation de Riemann-Mumford). *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi : S(\Sigma_g) &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ L &\mapsto \dim H^0(L) \mod 2 \end{aligned}$$

est une forme quadratique associée au produit cup sur $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. □

Lorsqu'on « linéarise » cette forme en L_ζ , on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_{L_\zeta}(a) &= q_\zeta(a), \quad \forall a \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ \text{où } \varphi_{L_\zeta}(a) &= \varphi(L_\zeta + a^{\text{PD}}) - \varphi(L_\zeta). \end{aligned}$$

On identifiera dans la suite

$$\begin{aligned} Spin(\Sigma_g) &= \{q : H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{ quadratique}\} \\ &= \{L \in S(\Sigma_g)\}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser la structure réelle sur Σ_g . Nous noterons $(c_\Sigma)_*$ et $(c_\Sigma)^*$ les automorphismes de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ induits par c_Σ . L'action de c_Σ sur $S(\Sigma_g)$ est induite par celle de c_Σ sur les diviseurs.

Notons J la structure complexe fixée sur Σ_g , et supposons quitte à changer la métrique que J est orthogonale pour la métrique fixée sur Σ_g . Posons $\overline{\Sigma}_g$ la surface Σ_g munie de l'orientation opposée et de la structure complexe $-J$. Considérons le morphisme

$$R : \begin{array}{ccc} R_\Sigma^+ & \rightarrow & R_{\overline{\Sigma}}^+ \\ (z, (v, Jv)) & \mapsto & (z, (v, -Jv)). \end{array}$$

Nous obtenons alors une involution

$$(dc_\Sigma \circ R)^* : Spin(\Sigma_g) \rightarrow Spin(\Sigma_g).$$

Définition 3.2. *L'ensemble des structures Spin réelles sur (Σ_g, c_Σ) est l'ensemble $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g) = \text{Fix}((dc_\Sigma \circ R)^*)$.*

Nous rappelons le lemme suivant (voir par exemple [7]).

Lemme 3.5. *Supposons que $\mathbb{R}\Sigma_g \neq \emptyset$, et soit $\zeta \in Spin(\Sigma_g)$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\zeta \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$,
- (ii) $(c_\Sigma)^* q_\zeta = q_\zeta$,
- (iii) $(c_\Sigma)^* L_\zeta = L_\zeta$.

□

Remarque 3.2. — Lorsque $\mathbb{R}\Sigma_g \neq \emptyset$, la condition $(c_\Sigma)^* L = L$ pour un $L \in S(\Sigma_g)$ équivaut à l'existence d'une structure réelle anti-holomorphe relevant c_Σ sur L (voir par exemple [23]). Une telle structure n'est toutefois pas unique : deux relevés diffèrent d'un facteur complexe constant.

Lemme 3.6. *L'ensemble $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$ est un espace affine de direction $F = \text{Fix}((c_\Sigma)^*) \subset H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

Démonstration. En effet, si q et q' sont deux éléments de $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$, alors $q - q'$ est un élément de $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $(q - q') \circ (c_\Sigma)_* = q - q'$. Réciproquement, si $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$ et $\alpha \in F$, alors $q + \alpha$ est un élément de $Spin(\Sigma_g)$ qui vérifie de plus $(c_\Sigma)^*(q + \alpha) = q + \alpha$. Donc $q + \alpha \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$. □

Remarque 3.3. — L'isomorphisme de dualité de Poincaré

$$\begin{array}{ccc} H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ a & \mapsto & a^\bullet \end{array}$$

commute avec $(c_\Sigma)_*$ et $(c_\Sigma)^*$, de sorte que F est le dual de Poincaré de $\text{Fix}((c_\Sigma)_*) \subset H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. De plus, si l'on prend une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$, elle induit une base de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, et $\text{Fix}((c_\Sigma)_*)$ est le sous-espace engendré par $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_{k-1}$ lorsque la courbe n'est pas séparante, et par $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + a_{k+m}, \dots, a_{k+m-1} + a_g, b_1, \dots, b_{k-1}, b_k + b_{k+m}, \dots, b_{k+m-1} + b_g$ si la courbe est séparante. Dans les deux cas, nous notons que le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel F est de dimension $g + k - 1$ et qu'il contient la réduction modulo 2 F^- de $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{-1}$ comme sous-espace de dimension g .

3.1.3 Action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ sur $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$

Revenons maintenant aux automorphismes réels sur les fibrés en droites complexes munis d'une structure réelle. Notons F_+ la réduction modulo 2 de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{+1}$, de sorte que F_+ et F^- sont duaux de Poincaré. La réduction modulo 2 du morphisme d'indice

$$\begin{array}{ccc} \text{ind}_2 : [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})] & \rightarrow & H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), H_1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \\ f & \mapsto & f_* \end{array}$$

a pour image F^- d'après le Lemme 3.4 (voir la Remarque 3.3).

Remarque 3.4. — On peut même expliciter ce morphisme à l'aide d'une base (d_i) de F_+ que l'on complète en une base (d_i, e_i) symplectique de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$:

$$(f_*)^{\text{PD}} = \sum_i f_*(e_i) d_i.$$

D'autre part, les éléments de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ s'identifiant canoniquement aux classes d'homotopie des automorphismes réels du fibré tangent à Σ_g , ils agissent par tiré en arrière sur les structures *Spin* réelles sur Σ_g .

Lemme 3.7. *L'action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ sur $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$ s'identifie à l'action par translation de F^- sur ce même espace grâce au morphisme ind_2 .*

Démonstration. Prenons un élément f de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$, un automorphisme $\Phi_f \in \mathbb{R}GL(T\Sigma_g)$ égal à f dans $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ et une structure *Spin* q_ζ sur Σ_g . Soit $a \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ une courbe simple sur Σ_g . Nous avons par définition

$$\begin{aligned} f \cdot q_\zeta(a) &= \langle (\Phi_f)^* \zeta, \tilde{a} \rangle \\ &= \langle \zeta, (\Phi_f)_*(\vec{a} + z) \rangle \end{aligned}$$

Or, l'action de $(\Phi_f)_*$ sur la classe de la fibre z est triviale, et en trivialisant $T\Sigma_g$ le long de a , on voit que l'action de $(\Phi_f)_*$ sur le champ de vecteur tangent à a est donnée par l'indice de f le long de a . Plus précisément, $(\Phi_f)_*(\vec{a}) = \vec{a} + f_*(a)z$. Ainsi

$$\begin{aligned} f \cdot q_\zeta(a) &= \langle \zeta, \vec{a} + f_*(a)z + z \rangle \\ &= q_\zeta(a) + f_*(a) \end{aligned}$$

car $\langle \zeta, z \rangle = 1$. □

Supposons que $\mathbb{R}\Sigma_g \neq \emptyset$ et notons

$$H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \mid w([\mathbb{R}\Sigma_g]) = g+1 \pmod{2}\},$$

et pour tout $w \in H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$,

$$\mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w) := \{L \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g) \mid w_1(\mathbb{R}L) = w\}$$

On en déduit la partition

$$\mathbb{R}Spin(\Sigma_g) = \bigsqcup_{w \in H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w). \quad (*)$$

Proposition 3.1. *Supposons que $\mathbb{R}\Sigma_g \neq \emptyset$. La partition $(*)$ est la réunion des orbites de l'action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ sur $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$. En particulier, ce sont des espaces affines sur F^- . De plus, chaque orbite se réécrit*

$$\mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w) = \{q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g) \mid q|_{H_1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} = \mathbb{1} - w\}.$$

Avant de passer à la démonstration, donnons le Lemme 3.8 que l'on peut trouver chez Natanzon (Lemma 3.2 p.72 de [19]).

Lemme 3.8. *Soit $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$ et a une courbe simple connexe sur Σ_g . Supposons que $\mathbb{R}\Sigma_g \neq \emptyset$.*

1. *Si $c_\Sigma(a) = a$ et $a \cap \mathbb{R}\Sigma_g = \emptyset$ (c'est-à-dire que a est une courbe globalement stable par c_Σ) alors $q(a) = 1$.*
2. *Si $c_\Sigma(a) \cap a = \emptyset$ alors $q(a + c_\Sigma(a)) = 0$.*

□

Démonstration de la Proposition 3.1. Commençons par démontrer que pour $w \in H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ nous avons l'égalité

$$\{L \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g) \mid w_1(\mathbb{R}L) = w\} = \{q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g) \mid q|_{H_1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} = \mathbb{1} - w\}.$$

Prenons pour cela $\zeta \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$. Par définition

$$q_\zeta([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) = \langle \zeta, \widetilde{[\mathbb{R}\Sigma_g]_i} \rangle,$$

ce qui signifie que $q_\zeta([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)$ vaut 1 si et seulement si le lacet $\widetilde{[\mathbb{R}\Sigma_g]_i}$ dans R_Σ^+ ne se relève pas dans la structure $Spin$ donnée par ζ . Or, ceci est équivalent à l'existence d'une section de $(\mathbb{R}L_\zeta)_i$ ne s'annulant pas (voir [19]). Donc

$$q_\zeta|_{H_1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} = \mathbb{1} - w_1(\mathbb{R}L).$$

D'autre part, si f est un élément de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ et $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$, alors grâce au Lemme 3.7

$$(f \cdot q)|_{H_1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} = q|_{H_1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} + f_*|_{H_1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} = \mathbb{1} - w$$

car f_* est un élément de F^- . Donc l'action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ préserve chacun des ensembles $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$.

Puis, si $q, q' \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$, le Lemme 3.8 nous assure que $(q - q')|_{F^+} = 0$ et donc que $q - q'$ est un élément de F^- . Ainsi l'action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ est transitive sur $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$. □

Définition 3.3. *Si ζ est un élément de $\mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$, nous dirons que $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est la première classe de Stiefel-Whitney de la structure $Spin$ ζ , et nous écrirons $w_\zeta = w$.*

Rappelons d'autre part (voir [13] par exemple) qu'étant donnée une structure $Spin$ q sur Σ_g , on définit son invariant d'Arf :

$$\text{Arf}(q) = \sum_i q(a_i)q(b_i) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

pour (a_i, b_i) une base symplectique de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Cette expression ne dépend pas de la base symplectique choisie et détermine la classe de bordisme de (Σ_g, q) , élément de $\Omega_2^{Spin} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (voir [14]).

Lemme 3.9. Pour $f \in [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ et $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$,

$$\text{Arf}(f.q) = \text{Arf}(q) + q((f_*)^{\text{PD}}).$$

En particulier, si q' est une structure *Spin* réelle de même classe de Stiefel-Whitney que q , alors,

$$\text{Arf}(f.q) - \text{Arf}(q) = \text{Arf}(f.q') - \text{Arf}(q').$$

Démonstration. Prenons une base symplectique (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ comme dans la Remarque 3.4. Alors

$$\begin{aligned} \text{Arf}(f.q) &= \sum_i (q(a_i) + f_*(a_i))(q(b_i) + f_*(b_i)) \\ &= \sum_i q(a_i)q(b_i) + \sum_i q(a_i)f_*(b_i) + \sum_i q(b_i)f_*(a_i) + \sum_i f_*(a_i)f_*(b_i). \end{aligned}$$

Mais, comme f_* est un élément de F^- qui est le dual de Poincaré du lagrangien F_+ ,

$$\text{Arf}(f.q) = \text{Arf}(q) + \sum_i q(a_i)f_*(b_i)$$

et q étant linéaire sur ce même lagrangien, nous obtenons la première affirmation,

$$\text{Arf}(f.q) = \text{Arf}(q) + q\left(\sum_i f_*(b_i)a_i\right).$$

Puis, pour q, q' et f comme dans l'énoncé, il existe g dans $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ tel que $g.q = q'$ (Lemme 3.7 et Proposition 3.1). Donc $q'((f_*)^{\text{PD}}) = q((f_*)^{\text{PD}}) + g_*((f_*)^{\text{PD}})$. Mais comme $(f_*)^{\text{PD}}$ et $(g_*)^{\text{PD}}$ sont tous les deux dans le lagrangien F_+ , nous avons $g_*((f_*)^{\text{PD}}) = 0$, ce qui prouve la seconde assertion. \square

Le Lemme 3.9 assure que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : (f, w) &\in [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)] \times H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ &\mapsto q((f_*)^{\text{PD}}) = \text{Arf}(f.q) - \text{Arf}(q) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

est bien définie indépendamment du choix de $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$. Cette application \mathcal{A} mesure l'action de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ sur les classes de bordisme des structures *Spin* réelles de Σ_g .

Lemme 3.10. Pour tout w dans $H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, l'application $\mathcal{A}^w = \mathcal{A}(\cdot, w) : [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)] \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un morphisme.

Démonstration. Ce lemme résulte du fait que les formes quadratiques $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g)$ sont linéaires en restriction au lagrangien F_+ qui est le dual de Poincaré de F^- . \square

Définition 3.4. On dit que deux structures *Spin* réelles ζ et ζ' sont bordantes si et seulement si elles ont même première classe de Stiefel-Whitney et si (Σ_g, ζ) et (Σ_g, ζ') sont bordantes.

Les lemmes précédents montrent que le groupe $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ agit sur les classes de bordisme réelles sans changer leur première classe de Stiefel-Whitney et que cette action est donnée par l'application \mathcal{A} .

3.2 Action des automorphismes réels sur les orientations du fibré déterminant et structures *Spin* réelles

3.2.1 Énoncés

Nous pouvons maintenant rappeler l'énoncé suivant qui donne une interprétation topologique de l'action de $\mathbb{R}GL(N)$ sur les orientations de $\text{Det}(N)$ lorsque $\deg(N) = g + 1 \pmod{2}$.

Théorème 3.2. *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe de rang 1 muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , de partie réelle non vide. Soit $f \in \mathbb{R}GL(N) = \mathbb{R}C^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$. Si le degré de N n'est pas de même parité que le genre de Σ_g , alors l'action de f sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ coïncide avec l'action de f sur les classes de bordisme de structures *Spin* réelles de (Σ_g, c_Σ) de même première classe de Stiefel-Whitney que $\mathbb{R}N$. Ainsi, f préserve les orientations de $\text{Det}(N)$ si et seulement si $\mathcal{A}(f, w_1(\mathbb{R}N)) = 0$.*

Remarque 3.5. —

- Nous traitons le cas où $\deg(N) = g \pmod{2}$ dans le Théorème 3.3 mais notons dès maintenant que l'énoncé précédent n'est plus vrai dans ce cas. En effet, la fonction constante égale à -1 préserve toujours les classes de bordisme de structures *Spin* réelles de Σ_g , mais son action sur les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ n'est triviale que lorsque $\deg(N) + 1 - g = 0 \pmod{2}$.

Nous pouvons formuler cette remarque de façon différente. Soit \mathcal{N} une déformation réelle de fibrés en droites holomorphes sur (Σ_g, c_Σ) au-dessus d'une base (B, c_B) . C'est-à-dire que pour b dans B (resp. dans $\mathbb{R}B$), \mathcal{N}_b est un fibré en droites holomorphe (resp. réel) sur Σ_g , et \mathcal{N} est un fibré en droites holomorphe réel sur $B \times \Sigma_g$. Notons $\pi : B \times \Sigma_g \rightarrow B$. Alors le groupe de Picard réel $\mathbb{R}\text{Pic}(B)$ agit sur \mathcal{N} par $L \in \mathbb{R}\text{Pic}(B) \mapsto \pi^*L \otimes \mathcal{N}$. Fibre à fibre, cette action ne change pas \mathcal{N}_b . Par contre la déformation globale n'est plus la même.

En prenant en particulier $B = \mathbb{C}P^1$, $L = \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(1)$ et $\deg(\mathcal{N}_b) = g \pmod{2}$, cette action change l'orientabilité du fibré déterminant $\text{Det}(\mathcal{N})$ au-dessus de $\mathbb{R}B = \mathbb{R}P^1$.

- Dans le cas particulier où la courbe est de genre zéro, le Lemme 3.4 nous dit qu'il n'y a essentiellement que deux automorphismes de fibrés en droites holomorphes réels sur la sphère au-dessus de l'identité : l'identité et la multiplication par -1 . Pour la sphère, nous n'avons donc pas besoin de structures *Spin* réelles. Un automorphisme n'échangera les orientations du fibré déterminant que s'il est négatif sur l'équateur et si le degré du fibré est pair.

Comme le suggère la Remarque 3.5, nous devons prendre en compte le signe des éléments de $\mathbb{R}GL(N)$ sur la partie réelle de Σ_g de façon plus précise pour obtenir un résultat plus général. C'est ce que nous faisons maintenant.

Tout élément f de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ induit un morphisme de calcul de signe

$$\epsilon_f : H_0(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

de la façon suivante. Le quotient $\frac{f}{|f|}$ restreint à chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$ est un élément de $\{-1, 1\}$. La fonction

$$\frac{f}{|f|} : \mathbb{R}\Sigma_g \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

est donc localement constante. Elle définit donc un morphisme de $H_0(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ que l'on compose avec le morphisme d'augmentation $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour obtenir ϵ_f .

Remarque 3.6. — Si nous choisissons une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$, alors les morphismes $f_* \in F^-$ et ϵ_f sont reliés par

$$\epsilon_f([\mathbb{R}\Sigma_g]_i^{\text{PD}}) = f_*(b_i) + \epsilon_f([\mathbb{R}\Sigma_g]_0^{\text{PD}}).$$

Posons

$$\begin{aligned} \beta_0(f) : H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ w &\mapsto \epsilon_f(\mathbf{1} - w^{\text{PD}}). \end{aligned}$$

Cette application mesure l'action de f sur les orientations de la droite réelle $\bigotimes_{w_1(\mathbb{R}L)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=0} (\mathbb{R}L)_{x_i}$ pour tout $L \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$ et $x_i \in (\mathbb{R}\Sigma_g)_i$.

Lemme 3.11. *Pout tout f élément de $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$, les applications $\beta_0(f)$ et $\mathcal{A}(f)$ sont deux formes affines de même direction.*

Démonstration. Soient w et w' deux éléments de $H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$ et $q' \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w')$. Prenons une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$. Elle induit une base $c_1 = a_1, \dots, c_{k-1} = a_{k-1}, c_k = a_k + a_{k+m}, \dots, c_{k+m-1} = a_{k+m-1} + a_g, c_{k+m} = b_k - b_{k+m}, \dots, c_g = b_{k+m-1} - b_g$ (resp. $c_1 = a_1, \dots, c_g = a_g$) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{+1}$ lorsque la courbe est séparante (resp. non séparante). On complète cette dernière en une nouvelle base symplectique de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ en posant $d_1 = b_1, \dots, d_{k-1} = b_{k-1}, d_k = b_k, \dots, d_{k+m-1} = b_{k+m-1}, d_{k+m} = a_k, \dots, d_g = a_{k+m-1}$ (resp. $d_1 = b_1, \dots, d_g = b_g$). On a

$$(f_*)^{\text{PD}} = \sum_{i=1}^g f_*(d_i) c_i.$$

D'après le Lemme 3.8, nous avons $q(c_i) = q'(c_i)$ pour $i \geq k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f)(w) - \mathcal{A}(f)(w') &= (q - q') \left(\sum_{i=1}^g f_*(d_i) c_i \right) \\ &= (q - q') \left(\sum_{i=1}^{k-1} f_*(b_i) [\mathbb{R}\Sigma_g]_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} f_*(b_i) (w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (\epsilon_f([\mathbb{R}\Sigma_g]_i^{\text{PD}}) - \epsilon_f([\mathbb{R}\Sigma_g]_0^{\text{PD}})) (w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) \end{aligned}$$

d'après la Remarque 3.6. Puisque $\sum_{i=1}^{k-1} (w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) = (w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_0)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f)(w) - \mathcal{A}(f)(w') &= \epsilon_f \left(\sum_{i=1}^{k-1} (w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) [\mathbb{R}\Sigma_g]_i^{\text{PD}} \right) \\ &\quad - \epsilon_f \left(\left(\sum_{i=1}^{k-1} (w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) \right) [\mathbb{R}\Sigma_g]_0^{\text{PD}} \right) \\ &= \epsilon_f \left(\sum_{i=0}^{k-1} (w - w')([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) [\mathbb{R}\Sigma_g]_i^{\text{PD}} \right) \\ &= \epsilon_f(w - w')^{\text{PD}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathcal{A}(f)(w) - \mathcal{A}(f)(w') = \beta_0(f)(w) - \beta_0(f)(w').$$

□

Autrement dit, un élément $f \in [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ agit de la même façon sur les classes de bordisme de structures $Spin$ réelles de première classe de Stiefel-Whitney w et sur les orientations de $\bigotimes_{w_1(\mathbb{R}L)([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)=0} (\mathbb{R}L)_{x_i}$ pour tout $L \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$ et $x_i \in (\mathbb{R}\Sigma_g)_i$, à une constante (ne dépendant pas de w) près. C'est cette constante $s_{top}(f)$ qui nous intéresse.

Définition 3.5. — Pour f dans $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ et $w \in H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on pose $s_{top}(f) := \beta_0(f)(w) + \mathcal{A}(f, w) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
 — Étant donné $(N, c_N) \rightarrow (\Sigma_g, c_\Sigma)$ un fibré en droites complexes muni d'une structure réelle, et $f \in \mathbb{R}GL(N)$, on pose

$$s_N(f) := s_{top}(f) + \beta_0(f)(w_1(\mathbb{R}N)) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Exemple 3.2. — Calculons la valeur de s_{top} sur la famille \mathcal{B} . Fixons pour cela $q \in \mathbb{R}Spin(\Sigma_g, w)$.

- Pour $i = 0, \dots, k-1$, d'une part $\mathcal{A}(f_i, w) = q([\mathbb{R}\Sigma_g]_i) = 1 - w([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)$, et d'autre part, comme f_i n'est négative que sur la composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$ de $\mathbb{R}\Sigma_g$, $\beta_0(f)(w) = 1 - w([\mathbb{R}\Sigma_g]_i)$. Nous avons donc dans ce cas $s_{top}(f_i) = 0$.
- Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante et $i \in \{k, \dots, g\}$, d'une part $\mathcal{A}(f_i, w) = q(a_i) = 1$ car a_i est globalement stable (voir Lemme 3.8), d'autre part $\beta_0(f)(w) = 0$ car f_i est positive sur $\mathbb{R}\Sigma_g$. Nous avons donc $s_{top}(f_i) = 1$ dans ce cas.
- Si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $i \in \{k, \dots, k+m-1\}$, d'une part $\mathcal{A}(f_i, w) = q(a_i + c_\Sigma(a_i)) = 0$ et $\mathcal{A}(g_i, w) = q(b_i + c_\Sigma(b_i)) = 0$ d'après le Lemme 3.5, d'autre part f_i est positive sur $\mathbb{R}\Sigma_g$ donc $\beta_0(f_i) = 0$. Nous avons donc dans ce cas $s_{top}(f_i) = s_{top}(g_i) = 0$.

Remarque 3.7. —

- Lorsque $\deg(N) = g+1 \pmod{2}$, nous pouvons prendre $w_1(\mathbb{R}N) \in H_{g+1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ pour calculer s_{top} . Nous avons alors dans ce cas $s_N = \mathcal{A}^{w_1(\mathbb{R}N)}$.
- Comme $-1 = \prod_{i=0}^{k-1} f_i \in [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$ (resp. $-1 = \prod_{i=0}^g f_i \in [(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, conj)]$) lorsque la courbe est séparante (resp. non séparante), il suit de l'exemple 3.2 que $s_{top}(-1) = 0$ (resp. $s_{top}(-1) = g-k+1 \pmod{2}$). D'après le Lemme 3.4, si $g-k+1 = 0 \pmod{2}$, s_{top} passe au quotient en un morphisme de F^- à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il en est de même pour s_N si $\deg(N) = g+1 \pmod{2}$.
- Lorsque la courbe est séparante, l'Exemple 3.2 et le Lemme 3.4 nous montrent que le morphisme s_{top} est nul (comparer avec [9]). Ainsi, dans ce cas, le signe $s_N(f)$ se calcule simplement en regardant le signe de f sur les composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ où $\mathbb{R}N$ est orientable et en en faisant le produit.

Dans le cas général, si nous choisissons une composante connexe particulière $(\mathbb{R}\Sigma_g)_0$ de $\mathbb{R}\Sigma_g$, la Remarque 3.1 nous permet de définir s_{top} sur le produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times F^-$. Si nous prenons une autre composante $(\mathbb{R}\Sigma_g)_i$, alors le morphisme obtenu se déduit du précédent en le composant à droite par l'isomorphisme donné dans la Remarque 3.1.

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat en tout degré.

Théorème 3.3. *Soit (N, c_N) un fibré en droites complexes sur (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide et $f \in \mathbb{R}GL(N)$. Alors l'automorphisme f préserve les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ si et seulement si $s_N(f) = 0$.*

Corollaire 3.1. *Si f est positive sur $\mathbb{R}\Sigma_g$ et préserve une structure Spin réelle de Σ_g , alors f préserve les orientations de $\text{Det}(N)$.*

Si (Σ_g, c_Σ) est séparante, alors f préserve les orientations de $\text{Det}(N)$ si et seulement si f échange les orientations d'un nombre pair de composantes orientables de $\mathbb{R}N$.

Démonstration. Ceci suit du Théorème 3.3, du Lemme 3.11 et de la Remarque 3.7. \square

Le Théorème 3.2 est un cas particulier du Théorème 3.3 grâce à la Remarque 3.7. Remarquons aussi que le signe s_N se décompose en une partie « purement topologique » ne dépendant pas du fibré N et une contribution de la partie réelle de N .

Pour démontrer le Théorème 3.3 nous commençons par étudier le cas où N est de degré 0 et $w_1(\mathbb{R}N)$ est nul en décrivant explicitement l'action des automorphismes sur les conoyaux des opérateurs de Cauchy-Riemann réels sur N . Dans un deuxième temps, nous réduisons le cas général au cas du degré 0.

3.2.2 Conoyaux d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels

L'objet de cette section est de décrire le conoyau réel d'un opérateur de Cauchy-Riemann sur le fibré en droites complexes trivial $(\underline{\mathbb{C}}, \text{conj}) \rightarrow (\Sigma_g, c_\Sigma)$. Nous supposons de plus que g est non nul.

Pour une structure complexe J sur Σ_g qui rend c_Σ anti-holomorphe, nous notons $\bar{\partial}_J$ l'opérateur de Cauchy-Riemann réel $\frac{1}{2}(d + i \circ d \circ J)$ sur le fibré en droites complexes trivial. Dans le cas où (Σ_g, c_Σ) est séparante, nous aurons aussi besoin d'une fonction $u : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante, valant 0 au voisinage de $\mathbb{R}\Sigma_g$, i sur une hémisphère et $-i$ sur l'autre. Cette fonction n'est pas unique, nous faisons donc un choix. Nous choisissons aussi une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$. Remarquons qu'elle induit une orientation sur chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$. D'autre part, les fonctions de la famille \mathcal{B} construites au §3.1.1 et que l'on utilise ici ne sont pas (généralement) à prendre à isotopie près, mais sont bien des représentants précis et choisis de leurs classes. En effet, si $\bar{\partial}$ est un opérateur de Cauchy-Riemann réel sur $(\underline{\mathbb{C}}, \text{conj})$, alors nous utiliserons le morphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*) &\rightarrow H_{\bar{\partial}}^1(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1} \\ f &\mapsto \frac{\bar{\partial}(f)}{f}. \end{aligned}$$

Lorsque $\bar{\partial} = \bar{\partial}_J$, une fonction $f \in \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ admettant un logarithme $g \in \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C})$ s'envoie sur $\bar{\partial}_J(g) = 0 \in H_{\bar{\partial}_J}^1(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1}$ par ce morphisme. Cette application est donc bien définie sur $[(\Sigma_g, c_\Sigma), (\mathbb{C}^*, \text{conj})]$ lorsque $\bar{\partial} = \bar{\partial}_J$. Ce n'est toutefois plus le cas lorsque $\bar{\partial} \neq \bar{\partial}_J$. En effet, un opérateur $\bar{\partial}$ sur le fibré trivial s'écrit $\bar{\partial}_J + \alpha$, avec $\alpha \in \Gamma(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1}\Sigma_g)_{+1}$, et pour $g \in \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C})$,

$$\frac{\bar{\partial}(\exp(g))}{\exp(g)} = \bar{\partial}_J(g) + \alpha$$

ce qui n'est pas en général dans l'image de $\bar{\partial}$.

Lemme 3.12. *Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante : $H_{\bar{\partial}_J}^1(\Sigma_g, \underline{\mathbb{C}})_{+1}$ est engendré par les formes*

$$\frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\bar{\partial}_J(f_g)}{f_g}.$$

Si (Σ_g, c_Σ) est séparante : $H_{\bar{\partial}_J}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ est engendré par les formes

$$\frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\bar{\partial}_J(f_{k-1})}{f_{k-1}}, \frac{\bar{\partial}_J(f_k)}{f_k}, u \frac{\bar{\partial}_J(f_k)}{f_k}, \dots, \frac{\bar{\partial}_J(f_{k+m-1})}{f_{k+m-1}}, u \frac{\bar{\partial}_J(f_{k+m-1})}{f_{k+m-1}} \text{ ou encore}$$

$$\frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\bar{\partial}_J(f_{k-1})}{f_{k-1}}, \frac{\bar{\partial}_J(g_k)}{g_k}, u \frac{\bar{\partial}_J(g_k)}{g_k}, \dots, \frac{\bar{\partial}_J(g_{k+m-1})}{g_{k+m-1}}, u \frac{\bar{\partial}_J(g_{k+m-1})}{g_{k+m-1}}.$$

Démonstration. Soit $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ une base de $H_{\bar{\partial}_J}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)$ vérifiant

$$\int_{a_l} \omega_j = \frac{1}{2i\pi} \delta_{j,l}.$$

Nous différencions les deux cas :

Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante : Posons $\omega'_j = \frac{\omega_j - \overline{c_\Sigma^* \omega_j}}{2}$; cette nouvelle famille forme une base de $H_{\bar{\partial}_J}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1}$. D'autre part, en reprenant les notations du §3.1.1, on remarque que pour tout $l \in \{1, \dots, g\}$, $f_{l|A_l}$ admet un logarithme $\log(f_{l|A_l})$ valant $i\pi$ sur a_l . On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega'_j &= \int_{A_l} \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega'_j \\ &= \int_{A_l} d(\log(f_{l|A_l}) \omega'_j) \\ &= \int_{\partial(A_l)} \log(f_{l|A_l}) \omega'_j \\ &= 2i\pi \int_{a_l} \omega'_j \\ &= \delta_{j,l}. \end{aligned}$$

Si (Σ_g, c_Σ) est séparante : Posons $\omega'_j = \frac{\omega_j - \overline{c_\Sigma^* \omega_j}}{2}$ pour $j = 1, \dots, k+m-1$ et $\omega''_j = \frac{\omega_j + \overline{c_\Sigma^* \omega_j}}{2i}$ pour $j = k, \dots, k+m-1$; de même, cette famille forme une base de $H_{\bar{\partial}_J}^0(\Sigma_g, K_\Sigma)_{-1}$. Dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega'_j &= \delta_{j,l}, \text{ pour } j, l = 1, \dots, k+m-1 \\ \int u \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega''_j &= \delta_{j,l}, \text{ pour } j, l = k, \dots, k+m-1. \end{aligned}$$

Faisons le calcul dans le second cas, et fixons $j, l \in \{k, \dots, k+m-1\}$. De même que

précédemment, $f_l|_{A_l}$ admet un logarithme $\log(f_l|_{A_l})$ valant $i\pi$ sur a_l , et on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} u \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega_j'' &= \int_{A_l} i \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega_j'' + \int_{A_{l+m}} -i \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega_j'' \\
&= \int_{A_l} i \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega_j'' + \int_{A_{l+m}} -c_{\Sigma}^* \left(i \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega_j'' \right) \\
&= 2 \Re \left(\int_{A_l} i \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \wedge \omega_j'' \right) \\
&= 2 \Re \left(i \int_{A_l} d(\ln(f_l|_{A_l}) \omega_j'') \right) \\
&= 2 \Re \left(i \int_{\partial(A_l)} \ln(f_l|_{A_l}) \omega_j'' \right) \\
&= -4\pi \Re \left(\int_{a_l} \omega_j'' \right) \\
&= 2\pi \Re \left(i \int_{a_l} \omega_j - i \int_{a_{l+m}} \omega_j \right) \\
&= \delta_{j,l}.
\end{aligned}$$

La dualité de Serre (voir [24]) nous fournit alors le résultat. \square

Nous allons maintenant rayonner dans $\mathbb{RC}_J(\mathbb{C})$ à partir de l'opérateur $\bar{\partial}_J$ en partant dans les directions fournies par l'action des automorphismes construits au §3.1.1 sur cet opérateur. Posons pour $f \in \mathbb{RC}^{\infty}(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$

$$\bar{\partial}_{J,f}^t = \bar{\partial}_J + t \frac{\bar{\partial}_J(f)}{f}.$$

On remarque que d'après le Lemme 3.12, si $\text{ind}(f) \neq 0$, alors le fibré holomorphe $(\mathbb{C}, \bar{\partial}_{J,f}^t)$ est isomorphe au fibré holomorphe trivial si et seulement si t est entier. En effet, si $g \in \mathbb{RGL}(\mathbb{C})$ est un tel isomorphisme, alors nous avons

$$\bar{\partial}_J + t \frac{\bar{\partial}_J(f)}{f} = g^* \bar{\partial}_J = \bar{\partial}_J + \frac{\bar{\partial}_J(g)}{g}. \quad (*)$$

Si l'on décompose f et g grâce à la famille \mathcal{B} , $\frac{\bar{\partial}_J(f)}{f}$ et $\frac{\bar{\partial}_J(g)}{g}$ s'écrivent comme combinaisons linéaires à coefficients entiers, donnés par les indices de f et g , des formes apparaissant dans le Lemme 3.12. L'égalité $(*)$ impose donc que t doit être entier.

En particulier, lorsque t n'est pas entier, le noyau de l'opérateur $\bar{\partial}_{J,f}^t$ est nul, et son conoyau est de dimension $g-1$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.2. *Soit (Σ_g, c_{Σ}) une surface de Riemann réelle de genre g non nul et de structure complexe fixée $J \in \mathbb{RJ}(\Sigma_g)$. Si t est un réel non entier, alors :*

Si (Σ_g, c_{Σ}) n'est pas séparante : pour tout $l \in \{1, \dots, g\}$, $H_{\bar{\partial}_{J,f_l}}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ est engendré par les formes

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\widehat{\bar{\partial}_J(f_l)}}{f_l}, \dots, \alpha_g = \frac{\bar{\partial}_J(f_g)}{f_g}.$$

Si (Σ_g, c_{Σ}) est séparante : $H_{\bar{\partial}_{J,f_l}}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ est engendré par les formes

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\widehat{\bar{\partial}_J(f_l)}}{f_l}, \dots, \alpha_{k-1} = \frac{\bar{\partial}_J(f_{k-1})}{f_{k-1}}, \alpha_k = \frac{\bar{\partial}_J(f_k)}{f_k},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+m} &= u \frac{\bar{\partial}_J(f_k)}{f_k}, \dots, \alpha_{g-m} = \frac{\bar{\partial}_J(f_{g-m})}{f_{g-m}}, \alpha_g = u \frac{\bar{\partial}_J(f_{g-m})}{f_{g-m}} \text{ si } 1 \leq l \leq k-1, \\
\text{ou par les formes } \alpha_1 &= \frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\widehat{\bar{\partial}_J(f_l)}}{f_l}, u \frac{\widehat{\bar{\partial}_J(f_l)}}{f_l}, \dots, \alpha_{g-m} = \frac{\bar{\partial}_J(f_{g-m})}{f_{g-m}}, \alpha_g = \\
&u \frac{\bar{\partial}_J(f_{g-m})}{f_{g-m}}, \alpha_{l+m} = \bar{\partial}_J(u) \text{ si } k \leq l \leq k+m-1 = g-m. \\
\text{De même, } H_{\bar{\partial}_{J,g_l}}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1} &\text{ est engendré par les formes} \\
\alpha_1 &= \frac{\bar{\partial}_J(f_1)}{f_1}, \dots, \frac{\widehat{\bar{\partial}_J(g_l)}}{g_l}, u \frac{\widehat{\bar{\partial}_J(g_l)}}{g_l}, \dots, \alpha_{g-m} = \frac{\bar{\partial}_J(g_{g-m})}{g_{g-m}}, \alpha_g = u \frac{\bar{\partial}_J(g_{g-m})}{g_{g-m}}, \\
\alpha_{l+m} &= \bar{\partial}_J(u) \text{ pour } l = k, \dots, k+m-1 = g-m.
\end{aligned}$$

Nous commençons par un résultat intermédiaire. Prenons $f = f_l$, $l \in \{1, \dots, g\}$, une des fonctions de la famille \mathcal{B} , et soit $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_l, \dots, \lambda_g)$ un $(g-1)$ -uplet de réels (g est non nul). Posons

$$\begin{aligned}
F_{f,\underline{\lambda}} : \mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \times L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1} &\rightarrow \mathcal{E}_{+1}^p \\
(J, t, v) &\mapsto \bar{\partial}_{J,f}^t v - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^g \lambda_j \alpha_j.
\end{aligned}$$

où $p > 2$ et \mathcal{E}_{+1}^p est le fibré sur $\mathbb{R}J(\Sigma_g)$ de fibre au-dessus de J les $(0,1)$ -formes pour J à valeurs complexes $L^p(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1} \Sigma_g)_{+1}$. Considérons $\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}} = F_{f,\underline{\lambda}}^{-1}(\{0\})$. Notons $\pi_{f,\underline{\lambda}} : \mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ la projection sur le second facteur.

Lemme 3.13. *Soit (Σ_g, c_Σ) une surface compacte réelle orientée de genre g non nul. Supposons que $\underline{\lambda}$ n'est pas nul. Alors :*

1. $\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}J(\Sigma_g) \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \times L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$. Plus précisément, 0 est une valeur régulière de $F_{f,\underline{\lambda}}$.
2. La différentielle $d\pi_{f,\underline{\lambda}}$ est surjective en tout point de $\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}}$.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}}$ est non vide. Nous montrons en fait un résultat qui implique directement les deux points du Lemme. Fixons $(J, t, v) \in \mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}}$, et montrons que

$$\begin{aligned}
d_{(J,t,v)} F_{f,\underline{\lambda}}(., 0, .) : (J, w) \in T_J \mathbb{R}J(\Sigma_g) \times L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1} \\
\mapsto \bar{\partial}_{J,f}^t w + \frac{1}{2}(i \circ dv \circ J + t \frac{v}{f} i \circ df \circ J) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^g \lambda_j \dot{\alpha}_j(J) \in L^p(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1} \Sigma_g)_{+1}
\end{aligned}$$

est surjective. Ici, $\dot{\alpha}_j(J)$ désigne $\frac{1}{2}(\frac{1}{f_j} i \circ df_j \circ J)$, $\frac{1}{2}(\frac{u}{f_j} i \circ df_j \circ J)$, ou $\frac{1}{2}(i \circ du \circ J)$ selon que

α_j vaut $\frac{\bar{\partial}_J(f_j)}{f_j}$, $u \frac{\bar{\partial}_J(f_j)}{f_j}$ ou $\bar{\partial}_J(u)$.

Déjà, l'image de $d_{(J,t,v)} F_{f,\underline{\lambda}}(., 0, .)$ est fermée et son conoyau est de dimension finie, car l'opérateur $\bar{\partial}_{J,f}^t$ est Fredholm. Supposons que $d_{(J,t,v)} F_{f,\underline{\lambda}}(., 0, .)$ n'est pas surjective et prenons donc $\omega \in L^{p'}(\Sigma_g, K_\Sigma)$ non nulle telle que pour tout $(J, w) \in T_J \mathbb{R}J(\Sigma_g) \times L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$

$$\int_{\Sigma} \omega \wedge d_{(J,t,v)} F_{f,\underline{\lambda}}(J, 0, w) = 0. \quad (*)$$

En particulier, en prenant $\dot{J} = 0$, nous avons pour tout $w \in L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$

$$\int_{\Sigma} \omega \wedge \bar{\partial}_{J,f}^t w = 0.$$

D'après le Théorème C.2.3 de [17], $\omega \in L^{1,p}(\Sigma_g, K_{\Sigma})$ et vérifie $\bar{\partial}_J \omega + t\omega \wedge \frac{\bar{\partial}_J(f)}{f} = 0$. Par régularité elliptique et d'après le Lemme de prolongement unique (voir [12], [11] ou [3] par exemple), ω est lisse et ne s'annule qu'en un nombre fini de points.

Supposons dans un premier temps que nous ne sommes pas dans le cas où la courbe est séparante et $l \geq k$ et $\lambda_{l+m} \neq 0$. Montrons qu'il existe un ouvert U non vide de $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=1}^g A_j$, invariant par c_{Σ} , et sur lequel ω et dv sont non nulles. Comme le lieu des zéros de dv est fermé, l'existence de U est équivalente au fait que dv ne soit pas partout nulle sur $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=1}^g A_j$. Nous raisonnons par l'absurde et supposons donc que v est localement constante sur $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=1}^g A_j$.

Comme $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=1}^g A_j$ est connexe, v y est constante. Par hypothèse, il existe $n \in \{1 \dots, g\} \setminus \{l\}$ tel que $\lambda_n \neq 0$. Nous distinguons plusieurs cas.

- Supposons tout d'abord que la courbe n'est pas séparante. Découpons alors Σ_g le long d'une courbe homologue à 0 de sorte à obtenir un tore privé d'un disque sur lequel seule la fonction f_n varie. En recollant un disque pour obtenir un tore T (voir Figure 3) nous pouvons y prolonger v et f_n , et nous avons alors l'équation

$$\bar{\partial}_{J_T} v = \lambda_n \frac{\bar{\partial}_{J_T} f_n}{f_n}$$

sur le tore T . Or, d'après le Lemme 3.12, ceci n'est pas possible, et nous obtenons une contradiction.

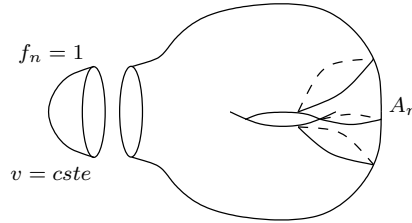


FIGURE 3 – Le tore T découpé

- Si la courbe est séparante et $n < k$, nous pouvons utiliser le même raisonnement.
- Supposons enfin que la courbe est séparante, que $n \geq k$ et que si $l \geq k$ alors $l+m \neq n$. Découpons alors Σ_g le long de deux courbes complexes conjuguées et homologues l'une de l'autre de sorte à obtenir une surface de genre deux privée de deux disques sur laquelle seule la fonction f_n (resp. f_{n-m}) varie si $n \leq g-m$ (resp. si $n > g-m$). En recollant deux disques pour obtenir une surface de genre deux Σ' (voir Figure 4) nous pouvons y prolonger v , u et f_n (resp. f_{n-m}) si $n \leq g-m$ (resp. si $n > g-m$),

et nous avons alors les équations

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_{J_{\Sigma'}} v &= \lambda_n \frac{\bar{\partial}_{J_{\Sigma'}} f_n}{f_n} + \lambda_{n+m} u \frac{\bar{\partial}_{J_{\Sigma'}} f_n}{f_n} \text{ si } n \leq g-m, \\ \bar{\partial}_{J_{\Sigma'}} v &= \lambda_{n-m} \frac{\bar{\partial}_{J_{\Sigma'}} f_{n-m}}{f_{n-m}} + \lambda_n u \frac{\bar{\partial}_{J_{\Sigma'}} f_{n-m}}{f_{n-m}} \text{ si } n > g-m,\end{aligned}$$

sur la surface Σ' . Or, d'après le Lemme 3.12, ceci n'est pas possible, et nous obtenons à nouveau une contradiction.

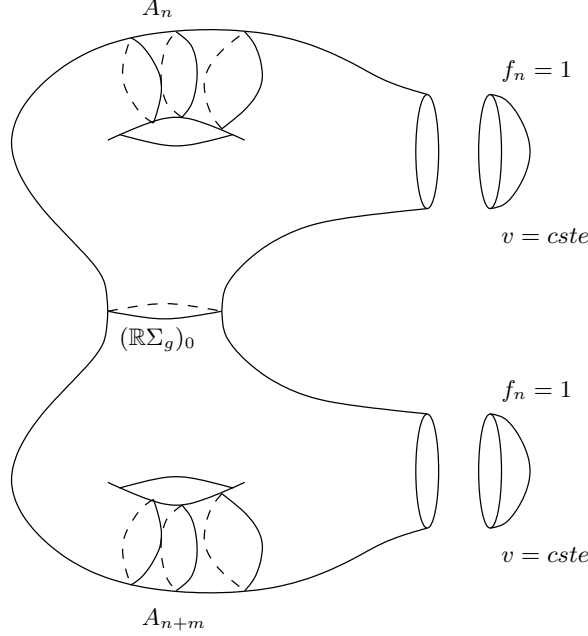


FIGURE 4 – La surface Σ' découpée

Prenons alors $U \subset \Sigma_g - \bigcup_{j=1}^g A_j$ un ouvert invariant par c_Σ tel que $\omega|_U$ et $dv|_U$ ne s'annulent pas, et ξ une $(0,1)$ -forme pour J à valeurs complexes, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante sur Σ_g , à support inclus dans U et telle que $\int_{\Sigma} \omega \wedge \xi \neq 0$. Comme dv ne s'annule pas sur U , posons $\dot{J} = (dv)^{-1} \circ (-i) \circ \xi \in T_J \mathbb{R}J(\Sigma_g)$ et nous avons

$$\int_{\Sigma} \omega \wedge d_{(J,t,v)} F_{f,\lambda}(\dot{J}, 0, 0) = \int_{\Sigma} \omega \wedge \xi \neq 0,$$

car le support de \dot{J} est inclus dans $\Sigma_g - \bigcup_{j=1}^g A_j$. Ceci est en contradiction avec $(*)$, et $d_{(J,t,v)} F_{f,\lambda}(\cdot, 0, \cdot)$ est donc surjective.

Supposons maintenant que la courbe est séparante, que $l \geq k$ et que λ_{l+m} est non nul. Montrons qu'il existe un ouvert U non vide de $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=0}^g A_j$, invariant par c_Σ , et sur lequel ω et dv sont non nulles. On raisonne à nouveau par l'absurde, et on suppose que v est localement constante sur $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=0}^g A_j$. Sur $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=1}^g A_j$, v vérifie $\bar{\partial}_J v = \lambda_{l+m} \bar{\partial}_J u$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$

tel que $v = \lambda_{l+m}u + c$ sur $\Sigma_g \setminus \bigcup_{j=1}^g A_j$ car $d(v - u)$ s'annule un nombre infini de fois sur ce même ensemble. Si l'on découpe maintenant un tore contenant A_l et qu'on le rebouche comme précédemment, nous avons sur ce tore T

$$\bar{\partial}_{J_T} v + tv \frac{\bar{\partial}_{J_T} f_l}{f_l} = 0.$$

Or, l'opérateur $\bar{\partial}_{J_T, f_l}^t$ est injectif lorsque t n'est pas entier. En effet, dans le cas contraire il existerait $g \in \mathcal{C}^\infty(T, \mathbb{C}^*)$ tel que $t \frac{\bar{\partial}_{J_T} f_l}{f_l} = \frac{\bar{\partial}_{J_T} g}{g}$. En utilisant les mêmes techniques que dans le Lemme 3.4, on peut démontrer que g est homotope à un produit de la forme $(f_l)^p (g_l)^q$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$. On a donc l'égalité

$$t \frac{\bar{\partial}_{J_T} f_l}{f_l} = \frac{\bar{\partial}_{J_T} g}{g} = p \frac{\bar{\partial}_{J_T} f_l}{f_l} + q \frac{\bar{\partial}_{J_T} g_l}{g_l} \quad (*)$$

dans $H_{\bar{\partial}_{J_T}}^1(T, \mathbb{C})$. Prenons alors $\omega \in H_{\bar{\partial}_{J_T}}^0(T, K_T)$ tel que

$$\int_{a_l} \omega = \frac{1}{2i\pi}.$$

On fait le produit extérieur par ω puis on intègre l'égalité (*) pour obtenir comme dans le Lemme 3.12

$$t = p + q \int_{b_l} \omega.$$

Le second terme de cette égalité est entier ou complexe alors que t ne l'est pas. Donc $\bar{\partial}_{J_T, f_l}^t$ est bien injectif et v est nul sur T . Toutefois, ceci n'est pas possible car on aurait alors $c = \lambda_{l+m}i \in \mathbb{R}$.

On raisonne ensuite de même que précédemment pour montrer que $d_{(J,t,v)} F_{f,\underline{\lambda}}(\cdot, 0, \cdot)$ est surjective.

Ceci nous donne immédiatement le premier point du Lemme. Quant au deuxième, $d_{(J,t,v)} \pi_{f,\underline{\lambda}}$ est surjective si et seulement si pour tout $\dot{t} \in \mathbb{R}$ il existe $(\dot{J}, w) \in T_J \mathbb{R} J(\Sigma_g) \times L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ tel que $(\dot{J}, \dot{t}, w) \in T_{(J,t,v)} \mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}} = \ker(d_{(J,t,v)} F_{f,\underline{\lambda}})$. Autrement dit, $d_{(J,t,v)} \pi_{f,\underline{\lambda}}$ est surjective si et seulement si

$$\forall \dot{t} \in \mathbb{R}, \exists (\dot{J}, w) \in T_J \mathbb{R} J(\Sigma_g) \times L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}, d_{(J,t,v)} F_{f,\underline{\lambda}}(\dot{J}, 0, w) = -d_{(J,t,v)} F_{f,\underline{\lambda}}(0, \dot{t}, 0).$$

Mais cette dernière assertion est vraie car $d_{(J,t,v)} F_{f,\underline{\lambda}}(\cdot, 0, \cdot)$ est surjective. \square

Démonstration de la Proposition 3.2. Premier cas : le support de $\frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}$ est connexe.

Prenons $f = f_l$ correspondant à une courbe stable ou globalement stable $a = a_l$, et soient $\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_l, \dots, \lambda_g$ des réels.

Nous établissons tout d'abord le résultat quand t est rationnel. Écrivons donc $t = \frac{p}{q}$ ($p \wedge q = 1$, et $q > 1$). Supposons qu'il existe une fonction v_t vérifiant

$$\bar{\partial}_{J,f}^t(v_t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^g \lambda_j \alpha_j$$

Notons $r_q : \widetilde{\Sigma}_g^q \rightarrow \Sigma_g$ le revêtement à q feuillets associé à $a \bullet \cdot \in \text{Hom}(H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ (voir Figure 5). Alors le relevé $\tilde{f} = f \circ r_q$ de f sur $\widetilde{\Sigma}_g^q$ admet une puissance t -ième (non unique, on en choisit une notée \tilde{f}^t). On note \tilde{v}_t et \tilde{f}_j les relevés respectifs de v_t et f_j , $j \in \{1, \dots, g\} \setminus \{l\}$; $\bar{\partial}_J$ désignera aussi le relevé de $\bar{\partial}_J$. Les fonctions \tilde{f}_j s'écrivent $\tilde{f}_j = f_{j,0} \times \dots \times f_{j,q-1}$, où les $f_{j,n}$ sont des fonctions du même type que celles construites au §3.1.1, à partir des relevés $a_{j,0}, \dots, a_{j,q-1}$ de a_j ; chacune ne varie donc que dans un des feuillets (voir Figure 5).

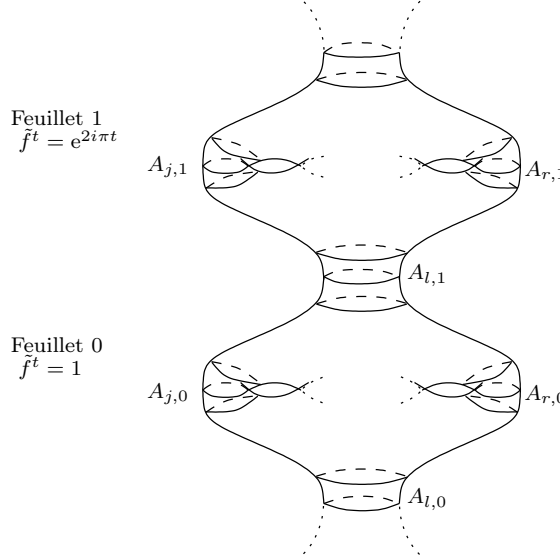


FIGURE 5 – Revêtement et relevés

Celles-ci sont numérotées de sorte que $\tilde{f}^t \alpha_{j,n} = e^{2i\pi n t} \alpha_{j,n}$. Comme

$$\bar{\partial}_J(\tilde{v}_t \tilde{f}^t) = \tilde{f}^t \bar{\partial}_{J,\tilde{f}}(\tilde{v}_t),$$

on a

$$\bar{\partial}_J(\tilde{v}_t \tilde{f}^t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^g \lambda_j \sum_{n=0}^{q-1} e^{2i\pi n t} \alpha_{j,n}.$$

Or, si le terme de gauche est dans l'image de l'opérateur $\bar{\partial}_J$, ce n'est pas le cas de celui de droite si un des λ_j est non nul. Ceci se vérifie en effet en utilisant par exemple une famille libre de $q(g-1)$ formes holomorphes $(\omega_{j,n})_{\substack{1 \leq j \neq l \leq g \\ 0 \leq n \leq q-1}}$ sur $\widetilde{\Sigma}_g^q$ associée à la famille $(a_{j,n})_{\substack{1 \leq j \neq l \leq g \\ 0 \leq n \leq q-1}}$, c'est-à-dire telles que

$$\int_{a_{j,n}} \omega_{r,s} = \frac{1}{2i\pi} \delta_{(j,n),(r,s)}.$$

Alors, pour tout $j, r \in \{1, \dots, g\} \setminus \{l\}$ et $n, s \in \{0, \dots, q-1\}$, on a comme dans le Lemme 3.12

$$\int_{\widetilde{\Sigma}_g^q} \alpha_{j,n} \wedge \omega_{r,s} = \int_{\widetilde{\Sigma}_g^q} \frac{\bar{\partial}_J(f_{j,n})}{f_{j,n}} \wedge \omega_{r,s} = \delta_{(j,n),(r,s)},$$

si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante ou si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $j, r \leq k+m-1$, et

$$\int_{\widetilde{\Sigma}_g^q} \alpha_{j,n} \wedge \omega_{r,s} = \int_{\widetilde{\Sigma}_g^q} u \frac{\bar{\partial}_J(f_{j-m,n})}{f_{j-m,n}} \wedge \omega_{r,s} = i \delta_{(j-m,n),(r,s)},$$

si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $j > k + m - 1$ et $r \leq k + m - 1$. Nous pouvons maintenant calculer

$$\int_{\widetilde{\Sigma}_g^q} \omega_{r,s} \wedge \bar{\partial}_J(\tilde{v}_t \tilde{f}^t) = \int_{\widetilde{\Sigma}_g^q} \omega_{r,s} \wedge \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^g \lambda_j \sum_{n=0}^{q-1} e^{2i\pi n t} \alpha_{j,n} \right).$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_r e^{2i\pi s t} \text{ si } (\Sigma_g, c_\Sigma) \text{ n'est pas séparante ou si } (\Sigma_g, c_\Sigma) \text{ est séparante et } r < k \\ 0 &= (\lambda_r + i\lambda_{r+m}) e^{2i\pi s t} \text{ si } (\Sigma_g, c_\Sigma) \text{ est séparante et } k \leq r \leq k + m - 1. \end{aligned}$$

Ainsi tous les λ_j sont nuls.

Passons maintenant au cas où t n'est plus forcément rationnel. Si nous supposons par l'absurde que $\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}}$ est non vide et que $\underline{\lambda}$ n'est pas nul, alors d'après le Lemme 3.13, $\pi_{f,\underline{\lambda}}$ est une application ouverte et son image contient donc un rationnel. Mais ceci contredit la première partie de la preuve. $\mathcal{M}_{f,\underline{\lambda}}$ est donc vide, ce qui conclut ce premier cas.

Deuxième cas : le support de $\frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}$ a deux composantes connexes. Prenons $f = f_l$ correspondant à une paire de courbes simples notée c . Nous ne montrons ici que le fait que la forme $\alpha_{l+m} = \bar{\partial}_J(u)$ n'est pas dans l'image de l'opérateur $\bar{\partial}_{J,f}^t$, le reste se montrant comme dans le premier cas.

Commençons par le cas $t = \frac{p}{q}$, $p \wedge q = 1$ et $q > 1$. Supposons par l'absurde l'existence d'une fonction v_t vérifiant

$$\bar{\partial}_{J,f}^t(v_t) = \bar{\partial}_J(u).$$

En raisonnant comme précédemment sur le revêtement à q feuillets associé à $c \bullet$, et en dénotant avec un tilde les relevés des diverses fonctions, voir Figure 6, on a

$$\bar{\partial}_J(\tilde{v}_t \tilde{f}^t) = \tilde{f}^t \bar{\partial}_J(\tilde{u}).$$

La surface $\widetilde{\Sigma}_g^q$ est séparée en deux composantes connexes par les relevés de $\mathbb{R}\Sigma_g$.

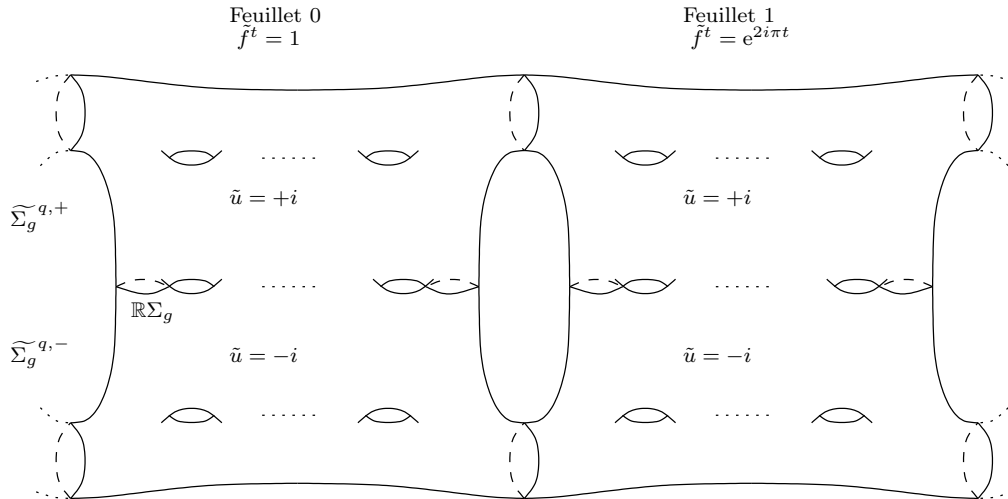


FIGURE 6 – Revêtement et relevés pour une courbe séparante

Prenons $\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}$ celle où la partie imaginaire de \tilde{u} est positive, et restreignons-y l'équation précédente. Définissons la fonction \tilde{u}^+ par $\tilde{u}^+ = \sum_{n=0}^{q-1} u_n$, où $u_n = \tilde{u}$ sur le n -ième feuillet et

$u_n = i$ ailleurs. Ainsi $\bar{\partial}_J(\tilde{u}^+) = \bar{\partial}_J(\tilde{u})$, et $\tilde{f}^t \bar{\partial}_J(\tilde{u}^+) = \sum_{n=0}^{q-1} e^{2i\pi nt} \bar{\partial}_J(u_n)$, de sorte que nous obtenons une fonction holomorphe h_t sur $\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}$ donnée par

$$h_t = \tilde{f}^t \tilde{v}_t - \sum_{n=0}^{q-1} e^{2i\pi nt} u_n.$$

De plus,

$$h_t(\partial(\widetilde{\Sigma}_g^{q,+})) \subset \bigcup_{n=0}^{q-1} (e^{2i\pi nt}(i + \mathbb{R})) = P_q,$$

car sur une composante réelle du n -ième feuillet, $n \in \{0, \dots, q-1\}$, on a $\tilde{v}_t \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}^t = e^{2i\pi nt}$, $u_n = 0$ et $u_j = i$ si $j \neq n$, tandis que $\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^{q-1} e^{2i\pi jt} = -e^{2i\pi nt}$.

Comme h_t est une application ouverte, nous avons $\partial(h_t(\widetilde{\Sigma}_g^{q,+})) \subset h_t(\partial(\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}))$, et comme $\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}$ est compacte, l'image de h_t est compacte. Prenons un disque B dans \mathbb{C} centré en 0 contenant l'image de h_t et de rayon minimal. Notons I un des points d'intersection du bord de ce disque avec le bord de l'image de h_t . Alors I est un point d'intersection entre deux droites de P_q . En effet, d'une part I est dans $h_t(\partial(\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}))$ qui est inclus dans P_q , d'autre part si I n'était pas à l'intersection de deux droites, alors on aurait un petit intervalle centré en I sur la droite contenant I qui serait inclus dans le bord de l'image de h_t . Ceci contredirait la minimalité du rayon du disque B .

Notons D et D' les deux droites de P_q s'intersectant en I . Comme P_q ne contient qu'un nombre fini de droites, au voisinage de I le bord de l'image de h_t est inclus dans $D \cup D'$ et l'intérieur de l'image est contenue dans un des secteurs découpés par D et D' (voir Figure 7).

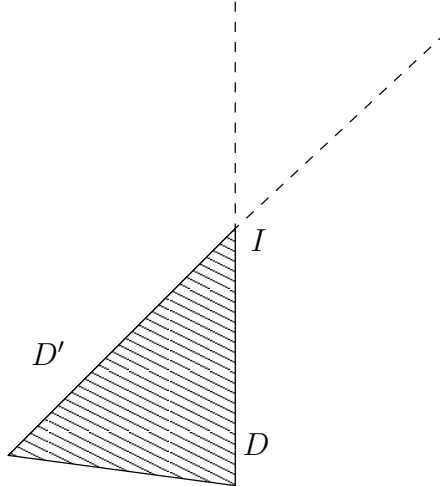


FIGURE 7 – Image de h_t au voisinage de I (partie hachurée)

Prenons $n \in \{0, \dots, q-1\}$ tel que $D = e^{2i\pi nt}(i + \mathbb{R})$ et considérons la restriction $h_{n,t}$ de h_t au feuillet n . Prenons un petit voisinage V de I . Comme $h_{n,t}$ est une application ouverte, $V \cap \text{im}(h_{n,t})$ est d'intérieur non vide. Le bord de l'image de $h_{n,t}$ au voisinage de I n'est donc

pas complètement inclus dans D . Ainsi, dans tout voisinage de I il existe un point qui est dans $\partial(\text{im}(h_{n,t}))$ mais pas dans D . On peut donc construire une suite de points $(I_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de $\partial(\text{im}(h_{n,t})) \setminus D$ qui converge vers I . De plus, les antécédents de ces points par $h_{n,t}$ sont dans le bord du n -ième feuillet mais pas dans la partie réelle. Quitte à extraire, on obtient donc une suite de points du n -ième feuillet qui converge vers un point x qui est dans l'intérieur de $\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}$ et tel que $h_t(x) = I$. Ceci est en contradiction avec le fait que h_t est une application ouverte sur $\widetilde{\Sigma}_g^{q,+}$.

Le cas où t n'est pas rationnel découle comme précédemment du Lemme 3.13. \square

3.2.3 Action des automorphismes réels sur le fibré déterminant

Passons maintenant à l'étude de l'action des automorphismes réels sur les orientations du fibré déterminant. Démontrons tout d'abord le résultat suivant.

Proposition 3.3. *Soit (N, c_N) un fibré vectoriel complexe de rang 1 sur (Σ_g, c_Σ) de partie réelle non vide. Fixons une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ et notons \mathcal{B} la famille génératrice de $\mathbb{R}GL(N)$ associée (voir §3.1.1). Nous avons alors les deux cas suivant.*

- *Si la courbe (Σ_g, c_Σ) est séparante, l'automorphisme $f_j \in \mathcal{B}$, $0 \leq j \leq k-1$ renverse les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ si et seulement si $(\mathbb{R}N)_j$ est orientable, alors que les automorphismes $f_k, g_k, \dots, f_{m+k-1}, g_{m+k-1} \in \mathcal{B}$ les préservent toujours.*
- *Si la courbe (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante, l'automorphisme $f_j \in \mathcal{B}$, $0 \leq j \leq k-1$ renverse les orientations du fibré $\text{Det}(N)$ si et seulement si $(\mathbb{R}N)_j$ est orientable, alors que les automorphismes $f_k, \dots, f_g \in \mathcal{B}$ les renversent toujours.*

Remarque 3.8. — Le cas où le genre g est nul se traite aisément. Nous avons dans ce cas un seul élément dans \mathcal{B} , et celui-ci est homotope à la fonction constante égale à -1 . Or celle-ci préserve les orientations si et seulement si $\dim(H^0(\Sigma_g, N)_{+1}) - \dim(H^1(\Sigma_g, N)_{+1}) = \deg(N) + 1$ est pair, donc si et seulement si $\mathbb{R}N$ n'est pas orientable.

La démonstration de la Proposition 3.3 se fait en deux temps. Nous commençons par traiter le cas du fibré trivial, puis nous utilisons des transformations élémentaires négatives pour nous ramener à ce cas.

Le cas du fibré trivial

Proposition 3.4. *Soit (Σ_g, c_Σ) une courbe de partie réelle non vide. Fixons une base symplectique réelle (a_i, b_i) de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ et notons \mathcal{B} la famille génératrice de $\mathbb{R}GL(\mathbb{C})$ associée (voir §3.1.1). Nous avons alors les deux cas suivant.*

- *Si la courbe (Σ_g, c_Σ) est séparante, l'automorphisme $f_j \in \mathcal{B}$, $0 \leq j \leq k-1$ renverse les orientations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$, alors que les automorphismes $f_k, g_k, \dots, f_{m+k-1}, g_{m+k-1} \in \mathcal{B}$ les préservent.*
- *Si la courbe (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante, tous les éléments de \mathcal{B} renversent les orientations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$.*

Fixons une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. La Proposition 3.2 donne une trivialisation du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$ au-dessus des intervalles ouverts $(\bar{\partial}_{J,\cdot}^t)_{t \in]n, n+1[}$, $n \in \mathbb{Z}$. Toutefois, sous l'action d'un des automorphismes f considérés dans l'énoncé, un intervalle ouvert $(\bar{\partial}_{J,f}^t)_{t \in]n, n+1[}$, $n \in \mathbb{Z}$, est envoyé sur l'intervalle consécutif $(\bar{\partial}_{J,f}^t)_{t \in]n+1, n+2[}$. Avant de démontrer la Proposition 3.4, commençons par décrire le rapport entre les trivialisations du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$ au-dessus de ces intervalles consécutifs. Nous introduisons pour cela les opérateurs suivants :

Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante :

$$\begin{aligned} \Phi_{f_l,0}^t : (v, \lambda_1, \dots, \widehat{\lambda_l}, \dots, \lambda_g) &\in L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{g-1} \\ &\mapsto \bar{\partial}_{J,f_l}^t(v) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq l}}^g \lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} \in L^p(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1}(\Sigma_g)) \end{aligned}$$

Si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $1 \leq l \leq k-1$:

$$\begin{aligned} \Phi_{f_l,1}^t : (v, \lambda_1, \dots, \widehat{\lambda_l}, \dots, \lambda_g) &\in L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{g-1} \\ &\mapsto \bar{\partial}_{J,f_l}^t(v) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq l}}^{k-1} \lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} \\ &\quad + \sum_{n=k}^{m+k-1} \left(\lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} + \lambda_{n+m} u \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} \right) \in L^p(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1}(\Sigma_g)) \end{aligned}$$

Si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $k \leq l \leq k+m-1$:

$$\begin{aligned} \Phi_{f_l,1}^t : (v, \lambda_1, \dots, \widehat{\lambda_l}, \dots, \lambda_g) &\in L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{g-1} \\ &\mapsto \bar{\partial}_{J,f_l}^t(v) + \sum_{n=0}^{k-1} \lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} \\ &\quad + \sum_{\substack{n=k \\ n \neq l}}^{m+k-1} \left(\lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} + \lambda_{n+m} u \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} \right) + \lambda_{l+m} \bar{\partial}_J(u) \in L^p(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1}(\Sigma_g)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi_{g_l,1}^t : (v, \lambda_1, \dots, \widehat{\lambda_l}, \dots, \lambda_g) &\in L^{1,p}(\Sigma_g, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{g-1} \\ &\mapsto \bar{\partial}_{J,g_l}^t(v) + \sum_{n=0}^{k-1} \lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(f_n)}{f_n} \\ &\quad + \sum_{\substack{n=k \\ n \neq l}}^{m+k-1} \left(\lambda_n \frac{\bar{\partial}_J(g_n)}{g_n} + \lambda_{n+m} u \frac{\bar{\partial}_J(g_n)}{g_n} \right) + \lambda_{l+m} \bar{\partial}_J(u) \in L^p(\Sigma_g, \Lambda_J^{0,1}(\Sigma_g)). \end{aligned}$$

Ceux-ci sont Fredholm d'indice 0 et sont surjectifs lorsque t n'est pas entier d'après la Proposition 3.2. Ces familles d'opérateurs rencontrent toutes des murs lorsque t est entier : leurs noyaux deviennent d'un coup non triviaux, de dimension 1 pour les deux premiers et de dimension 2 pour les deux derniers.

D'autre part, les déterminants des opérateurs Φ^t sont par définition canoniquement isomorphes à ceux des opérateurs $\bar{\partial}_J^t$ correspondant. On a donc (dans tous les cas) pour t non entier

$$\text{Det}(\bar{\partial}_J^t) = \text{Det}(\Phi^t) = \mathbb{R}.$$

Le Lemme suivant permet de décrire les trivialisations du fibré $\text{Det}(\underline{\mathbb{C}})$ au dessus des droites $\bar{\partial}_J^t$.

Lemme 3.14. *Les familles d'opérateurs $(\Phi_{\cdot,\cdot}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ ont des traversées de murs régulières, c'est-à-dire que leurs dérivées par rapport à t aux valeurs entières fournissent des isomorphismes entre leurs noyaux et leurs conoyaux.*

Démonstration. Montrons le par exemple pour $t = 0$. Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante et $1 \leq l \leq g$ (resp. si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $1 \leq l \leq k-1$), alors le noyau de $\Phi_{f_l,0}^0$ (resp. $\Phi_{f_l,1}^0$) est engendré par $(1, 0, \dots, 0)$ et son conoyau par $\frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}$ d'après le Lemme 3.12. Or

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_{f_l,0}^0(1, 0, \dots, 0) &= \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \\ \dot{\Phi}_{f_l,1}^0(1, 0, \dots, 0) &= \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}.\end{aligned}$$

Ce qui conclut ce cas.

Si (Σ_g, c_Σ) est séparante et $k \leq l \leq k+m-1$, alors le noyau de $\Phi_{f_l,1}^0$ est engendré par $(1, 0, \dots, 0)$ et $(u, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$ (le -1 est en position $l+m$) et son conoyau par $\frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}$ et $u \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}$ d'après le Lemme 3.12. Or

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_{f_l,1}^0(1, 0, \dots, 0) &= \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l} \\ \dot{\Phi}_{f_l,1}^0(u, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) &= u \frac{\bar{\partial}_J(f_l)}{f_l}.\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. \square

Le Lemme 3.14 nous permet d'énoncer la Proposition suivante, tirée de [17] (Proposition A.2.4 p.499), qui nous renseigne sur la trivialisaton du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$ au dessus des familles d'opérateurs voulues.

Proposition 3.5 ([17]). *Soient $t_1 < t_2$ deux réels non entiers séparés par un unique entier t_0 . Toute trivialisaton du fibré $\text{Det}(\mathbb{C})$ au-dessus du chemin $\bar{\partial}_J^t$ fournit un isomorphisme $\text{Det}(\bar{\partial}_J^{t_1}) = \text{Det}(\Phi^{t_1}) = \mathbb{R} \rightarrow \text{Det}(\bar{\partial}_J^{t_2}) = \text{Det}(\Phi^{t_2}) = \mathbb{R}$ de signe donné par la parité de la dimension du noyau de Φ^{t_0} .* \square

Démonstration de la Proposition 3.4. Fixons une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Supposons que g est non nul, le cas de la sphère étant traité dans la Remarque 3.8. Notons f un des automorphismes considérés dans l'enoncé. Prenons l'opérateur de Cauchy-Riemann réel $\bar{\partial}_{J,f}^{-\frac{1}{2}}$ sur $(\mathbb{C}, \text{conj})$. En agissant sur cet opérateur, l'automorphisme $f \in \mathbb{R}\mathcal{C}^\infty(\Sigma_g, \mathbb{C}^*)$ fournit d'après la formule de Leibniz l'opérateur

$$f^*(\bar{\partial}_{J,f}^{-\frac{1}{2}}) = \bar{\partial} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\partial}(f)}{f} = \bar{\partial}_{J,f}^{\frac{1}{2}},$$

et un isomorphisme

$$\text{Det}(\bar{\partial}_{J,f}^{-\frac{1}{2}}) = \text{Det}(\Phi_{f,\varepsilon(\Sigma_g)}^{-\frac{1}{2}}) = \mathbb{R} \rightarrow \text{Det}(\bar{\partial}_{J,f}^{\frac{1}{2}}) = \text{Det}(\Phi_{f,\varepsilon(\Sigma_g)}^{\frac{1}{2}}) = \mathbb{R}. \quad (*)$$

Comme f envoie la base de $H_{\bar{\partial}_{J,f}^{-\frac{1}{2}}}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ donnée dans la Proposition 3.2 sur la base de $H_{\bar{\partial}_{J,f}^{\frac{1}{2}}}^1(\Sigma_g, \mathbb{C})_{+1}$ donnée de la même façon et que $\Phi_{f,\varepsilon(\Sigma_g)}^{-\frac{1}{2}}$ et $\Phi_{f,\varepsilon(\Sigma_g)}^{\frac{1}{2}}$ sont construits à l'aide

de ces bases, l'isomorphisme $(*)$ est positif. D'après la Proposition 3.5, il ne coïncide avec celui induit par la trivialisation du fibré déterminant que lorsque la dimension du noyau de $\Phi_{f,\varepsilon(\Sigma_g)}^0$ est paire.

Nous retrouvons ainsi les différents cas mentionnés dans l'énoncé de la Proposition.

- Si (Σ_g, c_Σ) est séparante, les noyaux des Φ^0 induits par les automorphismes $f_k, g_k, \dots, f_{k+m-1}, g_{k+m-1}$ sont tous de dimension 2. Ces automorphismes préservent donc les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$.
- Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante, le noyau de $\Phi_{f_j,1}^0$, $j \in \{k, \dots, g\}$, est de dimension 1. Un automorphisme f_j , $j \in \{k, \dots, g\}$ renverse donc les orientations de $\text{Det}(N)$.
- Le noyau de $\Phi_{f_j,1}^0$, $j \in \{0, \dots, k-1\}$, est de dimension 1. L'automorphisme f_j , $j \in \{0, \dots, k-1\}$ renverse donc les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$.

□

Transformations élémentaires Nous considérons maintenant (N, c_N) un fibré en droites complexes muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , que l'on suppose de partie réelle non vide. Fixons une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Prenons un opérateur de Cauchy-Riemann réel $\bar{\partial} \in \mathbb{R}C_J(N)$. Notons \mathcal{N} le faisceau des sections holomorphes de $(N, \bar{\partial})$.

Définition 3.6. *La transformation élémentaire réelle négative en $x \in \mathbb{R}\Sigma_g$ du faisceau \mathcal{N} est le faisceau localement libre \mathcal{N}_{-x} muni d'une structure réelle défini par la suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{-x} \rightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{ev_x} N_x \rightarrow 0. \quad (*)$$

Le faisceau \mathcal{N}_{-x} est de rang un, de degré $\deg(N) - 1$, et sa partie réelle est de première classe de Stiefel-Whitney $w_1(\mathbb{R}N) - [\mathbb{R}\Sigma_g]_x^$.*

Si $\{z, \bar{z}\}$ est une paire de points complexes conjugués de Σ_g , alors la transformation élémentaire réelle négative en $\{z, \bar{z}\}$ du faisceau \mathcal{N} est le faisceau localement libre $\mathcal{N}_{-z-\bar{z}}$ muni d'une structure réelle défini par la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{-z-\bar{z}} \rightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{ev_{z,\bar{z}}} N_z \oplus N_{\bar{z}} \rightarrow 0. \quad (**)$$

Le faisceau $\mathcal{N}_{-z-\bar{z}}$ est de rang un, de degré $\deg(N) - 2$, et sa partie réelle est de première classe de Stiefel-Whitney $w_1(\mathbb{R}N)$.

Si $(\mathcal{F}, c_{\mathcal{F}})$ est un faisceau holomorphe muni d'une structure réelle sur (Σ_g, c_Σ) , l'involution $c_{\mathcal{F}}$ induit des involutions sur $H^0(\Sigma_g, \mathcal{F})$ et $H^1(\Sigma_g, \mathcal{F})$ et on notera avec des indices $+1$ leurs espaces propres associés à la valeur propre 1. On écrira aussi $\text{Det}(\mathcal{F}) = \Lambda^{\max}(H^0(\Sigma_g, \mathcal{F})_{+1}) \otimes \Lambda^{\max}(H^1(\Sigma_g, \mathcal{F})_{+1})^*$.

Lemme 3.15. *Si \mathcal{N}_{-x} est la transformation élémentaire réelle négative en $x \in \mathbb{R}\Sigma_g$ de \mathcal{N} , alors on a un isomorphisme canonique*

$$\text{Det}(\mathcal{N}) = \text{Det}(\mathcal{N}_{-x}) \otimes \mathbb{R}(N_x).$$

Si $\mathcal{N}_{-z-\bar{z}}$ est la transformation élémentaire réelle négative en $\{z, \bar{z}\}$ de \mathcal{N} , alors on a un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(\mathcal{N}) = \text{Det}(\mathcal{N}_{-z-\bar{z}}) \otimes \det(\Delta_z),$$

où

$$\Delta_z = \{(v, c_N(v)) \in N_z \oplus N_{\bar{z}}\}.$$

Démonstration. Ces deux isomorphismes proviennent directement des suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes (*) et (**). \square

Après une transformation élémentaire négative en $x \in \mathbb{R}\Sigma_g$ du faisceau \mathcal{N} nous retrouvons un fibré en droites holomorphe réel $(N_{-x}, \bar{\partial}_{-x}, c_{N,-x})$ dont le faisceau des sections holomorphes est naturellement isomorphe au faisceau \mathcal{N}_{-x} de la façon suivante. Prenons une carte locale holomorphe (U, ξ) de Σ_g centrée en x et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariante. Le fibré N_{-x} est alors obtenu en recollant $N_{|(\Sigma_g \setminus \{x\})}$ et $N_{|U}$ par l'application de recollement

$$\begin{aligned} N_{|U \cap (\Sigma_g \setminus \{x\})} &\rightarrow N_{|(\Sigma_g \setminus \{x\}) \cap U} \\ (\xi, v) &\mapsto (\xi, \xi v). \end{aligned} \quad (*)$$

Nous pouvons faire de même avec une transformation en une paire complexe conjuguée $\{z, \bar{z}\}$ pour obtenir un fibré holomorphe $(N_{-z-\bar{z}}, \bar{\partial}_{-z-\bar{z}}, c_{N,-z-\bar{z}})$.

Une fois le fibré N_{-x} fixé, nous avons deux inclusions naturelles $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariantes (voir aussi [20])

$$\begin{aligned} i_{-x} : L^{k,p}(\Sigma_g, N_{-x}) &\rightarrow L^{k,p}(\Sigma_g, N)_{-x} \\ j_{-x} : L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N_{-x}) &\rightarrow L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N), \end{aligned}$$

où $k \geq 1$, $p > 2$ et $L^{k,p}(\Sigma_g, N)_{-x}$ désigne les éléments de $L^{k,p}(\Sigma_g, N)$ qui s'annulent en x . On remarque que si $\bar{\partial}'$ est un autre opérateur de Cauchy-Riemann sur N , alors sa restriction à $L^{k,p}(\Sigma_g, N_{-x})$ à travers i_{-x} est à valeurs $L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N_{-x})$. En effet, $s \in L^{k,p}(\Sigma_g, N)_{-x}$ est dans l'image de i_{-x} si et seulement si il existe $s' \in L^{k,p}(\Sigma_g, N)$ tel qu'on ait $s = \xi s'$ au voisinage de x . Donc $\bar{\partial}'(s) = \bar{\partial}'(\xi s') = \xi \bar{\partial}'(s') \in j_{-x}(L^{k-1,p}(\Sigma_g, \Lambda^{0,1}\Sigma_g \otimes N_{-x}))$ car ξ est holomorphe. On a l'analogie pour les transformations en deux points complexes conjugués. On obtient donc deux applications

$$\begin{aligned} t_{-x} : \mathbb{RC}_J(N) &\rightarrow \mathbb{RC}_J(N_{-x}) \\ \text{et } t_{-z-\bar{z}} : \mathbb{RC}_J(N) &\rightarrow \mathbb{RC}_J(N_{-z-\bar{z}}). \end{aligned}$$

De plus, l'injection i_{-x} (resp. $i_{-z-\bar{z}}$) induit un isomorphisme entre le faisceau des sections holomorphes de $(N_{-x}, t_{-x}(\bar{\partial}'))$ (resp. de $(N_{-z-\bar{z}}, t_{-z-\bar{z}}(\bar{\partial}'))$) et le faisceau des sections holomorphes de $(N, \bar{\partial}')$ qui s'annulent en x (resp. en z et \bar{z}).

Ces fibrés N_{-x} et $N_{-z-\bar{z}}$ ne sont pas canoniquement définis. Toutefois les isomorphismes i_{-x} et $i_{-z-\bar{z}}$ nous donnent avec le Lemme 3.15 (voir aussi [20], Lemma 2.4.1),

Lemme 3.16. *Soit $(N_{-x}, c_{N,-x})$ (resp. $(N_{-z-\bar{z}}, c_{N,-z-\bar{z}})$) un fibré vectoriel complexe muni d'une structure réelle associé à une transformation élémentaire réelle négative de N en $x \in \mathbb{R}\Sigma_g$ (resp. en $\{z, \bar{z}\}$). Nous avons des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} \text{Det}(N) &= ((t_{-x})^* \text{Det}(N_{-x})) \otimes \mathbb{R}(N_x) \\ \text{Det}(N) &= ((t_{-z-\bar{z}})^* \text{Det}(N_{-z-\bar{z}})) \otimes \det(\Delta_z). \end{aligned}$$

\square

Nous pouvons de plus déterminer la fibre de N_{-x} (resp. $N_{-z-\bar{z}}$) au-dessus de x (resp. z et \bar{z}).

Lemme 3.17. *Les injections i_{-x} et $i_{-z-\bar{z}}$ induisent naturellement des isomorphismes*

$$\begin{aligned} (N_{-x})_x &= T_x^* \Sigma_g \otimes N_x, \\ (N_{-z-\bar{z}})_z &= T_z^* \Sigma_g \otimes N_z, \\ \text{et } (N_{-z-\bar{z}})_{\bar{z}} &= T_{\bar{z}}^* \Sigma_g \otimes N_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Démonstration. Nous faisons la démonstration dans le cas d'une transformation élémentaire en un point réel, l'autre cas étant analogue. Fixons un opérateur $\bar{\partial} \in \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$. Prenons un élément v dans $(N_{-x})_x$ et considérons une section locale holomorphe s_v de $(N_{-x}, t_{-x}(\bar{\partial}))$ définie sur un voisinage de x et telle que $s_v(x) = v$. Alors $i_{-x}(s_v)$ est une section locale holomorphe de $(N, \bar{\partial})$ qui s'annule au point x . On peut donc définir sa dérivée en x $\nabla_x(i_{-x}(s_v)) = pr_x \circ d_x(i_{-x}(s_v)) \in T_x^* \Sigma_g \otimes N_x$, où $pr_x : T_{(x,0)}N \rightarrow N_x$ est la projection parallèlement au tangent à la section nulle de N .

Vérifions tout d'abord que si $\bar{\partial}' \in \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)$ est un autre opérateur et s'_v est une section locale holomorphe de $(N_{-x}, t_{-x}(\bar{\partial}'))$ valant v en x , on a $\nabla_x(i_{-x}(s_v)) = \nabla_x(i_{-x}(s'_v))$. Supposons dans un premier temps que v est non nul. Il existe alors une fonction f à valeurs complexes définie sur un petit voisinage de x , telle que $s'_v = f s_v$. En particulier $f(x) = 1$. De plus, $d_x(i_{-x}(s'_v)) = d_x(f i_{-x}(s_v)) = i_{-x}(s_v)(x) d_x(f) + f(x) d_x(i_{-x}(s_v)) = d_x(i_{-x}(s_v))$. Donc $\nabla_x(i_{-x}(s_v)) = \nabla_x(i_{-x}(s'_v))$. Si v est nul, une section s_0 s'écrit $f s$ où s est une trivialisatation locale de N_{-x} au voisinage de x et f est une fonction à valeurs complexes définie sur un petit voisinage de x et s'annulant en x . On trouve alors $d_x(i_{-x}(s_0)) = 0$, donc $\nabla_x(i_{-x}(s_0)) = 0$.

On obtient donc une application linéaire

$$\begin{aligned} (N_{-x})_x &\rightarrow T_x^* \Sigma_g \otimes N_x \\ v &\mapsto \nabla_x(i_{-x} s_v), \end{aligned} \quad (\nabla)$$

bien définie indépendamment du choix de l'opérateur et de s_v . Vérifions maintenant que celle-ci est injective. Prenons \tilde{s} une section locale holomorphe de $(N, \bar{\partial})$ ne s'annulant pas au voisinage de x . Alors, il existe s une section locale de $(N_{-x}, t_{-x}(\bar{\partial}))$ telle que $i_{-x}(s) = \xi \tilde{s}$. Donc $\nabla_x(i_{-x}(s)) = pr_x(d_x \xi \tilde{s}) \neq 0$. Comme $(N_{-x})_x$ est de dimension 1, on en conclut que l'application (∇) est injective. Par égalité des dimensions, c'est un isomorphisme. \square

Démonstration de la Proposition 3.3. Fixons une structure complexe $J \in \mathbb{R}J(\Sigma_g)$. Prenons un point x_i , $1 \leq i \leq k_-$, sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}\Sigma_g$ où $\mathbb{R}N$ est non-orientable, et choisissons $l = \frac{|\deg(N) - k_-|}{2}$ points $z_1, \dots, z_l \in \Sigma_g \setminus \mathbb{R}\Sigma_g$. Supposons tout d'abord que $\deg(N) - k_-$ est positif. En effectuant des transformations élémentaires réelles négatives en $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{k_-}, z_1, c_\Sigma(z_1), \dots, z_l, c_\Sigma(z_l))$, on obtient un fibré en droites complexes muni d'une structure réelle $(N', c_{N'})$ de degré zéro et dont toutes les composantes réelles sont orientables. D'après le Lemme 3.16 nous avons un isomorphisme canonique

$$\text{Det}(N) = ((t_{-\underline{x}})^* \text{Det}(N')) \otimes \det \left(\bigoplus_{i=1}^{k_-} \mathbb{R}N_{x_i} \right) \otimes \det \left(\bigoplus_{i=1}^l \Delta_{z_i} \right). \quad (*)$$

Fixons f un des automorphismes considérés dans l'énoncé. D'après l'isomorphisme $(*)$ le signe de l'action de f sur les orientations de $\text{Det}(N)$ est donné par le signe de son action sur les orientations de $\text{Det}(N')$ si f est positive sur un nombre pair de composantes non-orientables de $\mathbb{R}N$ et par son opposé sinon. Enfin, en choisissant un isomorphisme entre $(N', c_{N'})$ et $(\mathbb{C}, \text{conj})$ on voit que le signe de l'action de f sur les orientations de $\text{Det}(N')$ est le même que sur les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$.

Vérifions pour finir les différents cas.

- Si (Σ_g, c_Σ) est séparante, les automorphismes $f_k, g_k, \dots, f_{k+m-1}, g_{k+m-1}$ sont tous positifs sur $\mathbb{R}\Sigma_g$ et d'après la Proposition 3.4 ils préservent les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$. Ils préservent donc les orientations de $\text{Det}(N)$.
- Si (Σ_g, c_Σ) n'est pas séparante, un des automorphismes $f_j, j \in \{k, \dots, g\}$ est positif sur toutes les composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$, et d'après la Proposition 3.4 il renverse les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$. Il renverse donc les orientations de $\text{Det}(N)$.

- Un des automorphismes f_j , $j \in \{0, \dots, k-1\}$ est positif sur toutes les composantes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ sauf sur la j -ième, et d'après la Proposition 3.4 il renverse les orientations de $\text{Det}(\mathbb{C})$. Il préserve donc les orientations de $\text{Det}(N)$ si et seulement si $(\mathbb{R}N)_j$ n'est pas orientable.

Ce qui conclut la démonstration de la Proposition 3.3. \square

Démonstration du Théorème 3.3. Ce Théorème découle maintenant de la Proposition 3.3 de l'Exemple 3.2 et du Lemme 3.4. \square

3.3 Fibré déterminant sur le groupe de Picard

Nous donnons maintenant une application du Théorème 3.3.

Commençons par faire quelques remarques concernant le groupe de Picard réel (voir par exemple [9]). Soit (Σ_g, c_Σ) une surface de Riemann réelle de genre $g \geq 1$. Nous supposons que sa partie réelle est non vide.

Notons $\mathbb{R}\mathcal{L}(\Sigma_g)$ l'ensemble des fibrés en droites holomorphes réels sur (Σ_g, c_Σ) . Nous avons sur $\mathbb{R}\mathcal{L}(\Sigma_g)$ un fibré en droites réelles Det de fibre $\Lambda^{\max}(H^0(\Sigma_g, L)_{+1}) \otimes \Lambda^{\max}(H^1(\Sigma_g, L)_{+1})^*$ au-dessus de (L, c_L) .

Considérons $\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g)$ le groupe de Picard réel de (Σ_g, c_Σ) . Nous avons une application naturelle $\mathbb{R}\mathcal{L}(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g)$ qui consiste à associer à un fibré en droites holomorphe réel sa classe d'isomorphisme. Toutefois, comme le montre la Remarque 3.5, un lacet dans $\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g)$ ne correspond pas à une déformation à isomorphisme près de fibrés en droites holomorphes réels.

Nous pouvons cependant associer à un tel lacet $([L]_t)_{t \in [0,1]}$ un élément de F^- , de la façon suivante. Choisissons un chemin d'opérateurs de Cauchy-Riemann réels $(\bar{\partial}_t)_{t \in [0,1]}$ sur un fibré en droites complexe muni d'une structure réelle (L, c_L) fixé se projetant dans $\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g)$ sur le lacet $([L]_t)_{t \in [0,1]}$. En prenant un automorphisme réel $f \in \mathbb{R}GL(L)$ tel que $f^*\bar{\partial}_1 = \bar{\partial}_0$ nous obtenons, d'après le Lemme 3.4, un élément $\text{ind}_2(f)$ de F^- . D'autre part, si $g \in \mathbb{R}GL(L)$ est un autre automorphisme vérifiant $g^*\bar{\partial}_1 = \bar{\partial}_0$, alors g est homotope à plus ou moins l'automorphisme f (car l'automorphisme -1 fixe les opérateurs de Cauchy-Riemann). Cette construction nous fournit un morphisme de « monodromie »

$$\mu : H_1(\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow F^-.$$

D'autre part, nous introduisons comme Gross et Harris (voir [9]) le morphisme

$$\begin{aligned} \deg \times w_1 : \mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g) &\rightarrow \mathbb{Z} \times H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ (L, c_L) &\mapsto (\deg(L), w_1(\mathbb{R}L)). \end{aligned}$$

Pour $d \in \mathbb{Z}$ et $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tels que $w([\mathbb{R}\Sigma_g]) = d \pmod{2}$, nous noterons $\mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_g) = (\deg \times w_1)^{-1}(d, w)$. Remarquons que

$$\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g) = \bigsqcup_{\substack{(d,w) \in \mathbb{Z} \times H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ w([\mathbb{R}\Sigma_g]) = d \pmod{2}}} \mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_g).$$

Comme nous l'avons noté dans la Remarque 3.7, lorsque d et $w([\mathbb{R}\Sigma_g])$ sont congrus à $g-1$ modulo 2, le morphisme \mathcal{A}^w est bien défini sur F^- .

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant.

Théorème 3.4. *Soit (Σ_g, c_Σ) une surface de Riemann réelle de partie réelle non vide. Soit $d \in \mathbb{Z}$ et $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tels que $d = w([\mathbb{R}\Sigma_g]) = g - 1 \pmod{2}$. Le fibré Det sur l'ensemble des fibrés en droites holomorphes réels de degré d et de partie réelle de première classe de Stiefel-Whitney w descend sur $\mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_g)$ en un fibré noté Det_w^d . De plus, la première classe de Stiefel-Whitney de ce fibré est donnée par :*

$$w_1(\text{Det}_w^d) = \mathcal{A}^w \circ \mu.$$

Comme nous l'avons déjà vu au §3.2, le fibré Det ne descend pas en un fibré sur $\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g)$ tout entier. En effet, si (L, c_L) est un fibré en droites holomorphe réel, -1 en est un automorphisme holomorphe. Or comme nous l'avons déjà remarqué, -1 préserve les orientations de $\text{Det}(L)$ si et seulement si $\deg(L) + 1 - g$ est pair. Ainsi, le fibré Det ne descend que sur les composantes de $\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g)$ formées des fibrés dont le degré est de même parité que $g - 1$, et le Théorème 3.4 donne sa première classe de Stiefel-Whitney.

Pour étudier l'autre cas, nous fixons un point $p \in \mathbb{R}\Sigma_g$ et considérons le fibré Det_p sur $\mathbb{R}\mathcal{L}(\Sigma_g)$ de fibre $\Lambda^{\max}(H^0(\Sigma_g, L)_{+1}) \otimes \Lambda^{\max}(H^1(\Sigma_g, L)_{+1})^* \otimes \mathbb{R}L_p$ au-dessus de (L, c_L) .

Pour $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, notons $\tilde{w}_p \in H_{g-1}^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'unique classe égale à w partout sauf peut-être sur la composante de $\mathbb{R}\Sigma_g$ contenant p . Nous pouvons maintenant énoncer la suite du Théorème 3.4.

Théorème 3.5. *Soit (Σ_g, c_Σ) une surface de Riemann réelle de partie réelle non vide et soit p un point réel de Σ_g . Soit $d \in \mathbb{Z}$ et $w \in H^1(\mathbb{R}\Sigma_g, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tels que $d = w([\mathbb{R}\Sigma_g]) = g \pmod{2}$. Le fibré Det_p sur l'ensemble des fibrés en droites holomorphes réels de degré d et de partie réelle de première classe de Stiefel-Whitney w descend sur $\mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_g)$ en un fibré noté $\text{Det}_{p,w}^d$. De plus, la première classe de Stiefel-Whitney de ce fibré est donnée par :*

$$w_1(\text{Det}_{p,w}^d) = \mathcal{A}^{\tilde{w}_p} \circ \mu.$$

Avant d'entamer la démonstration notons d'après la Remarque 3.1 qu'en déplaçant le point p sur une autre composante connexe de $\mathbb{R}\Sigma_g$, on ajoute $c \circ \mu$ à la classe du Théorème 3.5, où c est une courbe simple globalement invariante par c_Σ et reliant les deux composantes connexes de $\mathbb{R}\Sigma_g$ en question, et pour tout $a \in H_1(\mathbb{R}\text{Pic}(\Sigma_g), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $c \circ \mu(a) = (\mu(a))(c)$.

Soulignons d'autre part que si le fibré Det_p est défini comme un produit tensoriel de Det avec $\mathbb{R}L_p$ sur $\mathbb{R}\mathcal{L}(\Sigma_g)$, ce n'est plus le cas pour $\text{Det}_{w,p}^d$ sur $\mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_g)$.

Démonstration des Théorèmes 3.4 et 3.5. Prenons une base symplectique réelle de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ avec p comme point base. Choisissons un fibré vectoriel complexe (N, c_N) de rang un sur (Σ_g, c_Σ) . Posons $d = \deg(N)$ et $w = w_1(\mathbb{R}N)$. Nous savons qu'à chaque opérateur de Cauchy-Riemann sur N correspond une unique structure holomorphe et réciproquement (voir [15]). Nous avons donc un isomorphisme

$$\mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_g) \cong \mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)/\mathbb{R}GL(N)$$

De plus, le tiré en arrière du fibré $\text{Det}(N)$ par cet isomorphisme est le fibré Det . D'autre part, le lacet dans $\mathbb{R}\mathcal{C}_J(N)/\mathbb{R}GL(N)$ engendré par un automorphisme $f \in \mathbb{R}GL(N)$ associé à une courbe $a \in H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})_{+1}$ est envoyé sur un lacet de monodromie $a^{\text{PD}} \in F^-$. Les Théorèmes 3.2 et 3.3 nous permettent alors de conclure. \square

Exemple 3.3. — Prenons par exemple le cas du genre $g = 1$. Chaque composante $\mathbb{R}\text{Pic}_w^d(\Sigma_1)$ est alors un cercle auquel est associée une monodromie $\pm f$, où f est une des deux fonctions de la famille \mathcal{B} construite au §3.1.1. Comme nous supposons que la partie réelle de Σ_1 est non vide, celle-ci a une ou deux composantes.

Lorsqu'elle en a deux, la courbe est séparante. Si d est pair, alors w a la même valeur sur chaque composante de $\mathbb{R}\Sigma_1$. Si nous appliquons alors le Théorème 3.4 en utilisant le Théorème 3.2 et l'Exemple 3.2, nous avons

$$w_1(\mathrm{Det}_w^d)([\mathbb{R}\mathrm{Pic}_w^d(\Sigma_1)]) = \mathcal{A}^w(f) = 1 - w([\mathbb{R}\Sigma_1]_0)$$

et nous voyons que le fibré déterminant est orientable exactement sur les composantes du groupe de Picard où $w \neq 0$. Si d est impair et p un point sur la composante où w est non nulle, alors $\tilde{w}_p = 0$ et de même que ci-dessus, le fibré $\mathrm{Det}_{p,w}^d$ n'est pas orientable. Si p est sur la composante où w est nulle, alors $\mathrm{Det}_{p,w}^d$ est orientable.

Lorsque $\mathbb{R}\Sigma_1$ n'a qu'une seule composante, la courbe n'est pas séparante. En raisonnant comme précédemment, lorsque d est pair, et le fibré déterminant n'est orientable sur aucune des composantes du groupe de Picard. Lorsque d est impair, \tilde{w}_p est nulle et $\mathrm{Det}_{p,w}^d$ n'est pas orientable.

Remarque 3.9. — Nous avons en fait calculé la première classe de Stiefel-Whitney du déterminant de la cohomologie de la partie réelle des fibrés universels de Poincaré décrits par Biswas et Hurtubise dans [5] lorsque la courbe (Σ_g, c_Σ) est de partie réelle non vide.

Références

- [1] M. F. ATIYAH, R. BOTT et A. SHAPIRO : Clifford modules. *Topology*, 3(suppl. 1):3–38, 1964.
- [2] Michael F. ATIYAH : Riemann surfaces and spin structures. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 4:47–62, 1971.
- [3] Michèle AUDIN et Jacques LAFONTAINE, éditeurs. *Holomorphic curves in symplectic geometry*, volume 117 de *Prog. Math.* Birkhäuser, 1994.
- [4] Indranil BISWAS, Johannes HUISMAN et Jacques HURTUBISE : The moduli space of stable vector bundles over a real algebraic curve. *Math. Ann.*, 347(1):201–233, 2010.
- [5] Indranil BISWAS et Jacques HURTUBISE : Universal bundle over the reals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, posted on July 25, 2011, PII S 0002-9947(2011)05345-6 (to appear in print).
- [6] Rémi CRÉTOIS : Orientabilité d'espaces de modules de courbes réelles. En préparation.
- [7] Alex DEGTYAREV, Ilia ITENBERG et Viatcheslav KHARLAMOV : On the number of components of a complete intersection of real quadrics. Preprint math.AG/0806.4077v2, 2008.
- [8] Kenji FUKAYA, Yong-Geun OH, Hiroshi OHTA et Kaoru ONO : *Lagrangian intersection Floer theory : anomaly and obstruction. Part II*, volume 46 de *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [9] Benedict H. GROSS et Joe HARRIS : Real algebraic curves. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(2):157–182, 1981.
- [10] Joe HARRIS : Theta-characteristics on algebraic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 271(2):611–638, 1982.
- [11] Helmut HOFER, Véronique LIZAN et Jean-Claude SIKORAV : On genericity for holomorphic curves in four-dimensional almost-complex manifolds. *J. Geom. Anal.*, 7(1):149–159, 1997.

- [12] S. IVASHKOVICH et V. SHEVCHISHIN : Structure of the moduli space in a neighborhood of a cusp-curve and meromorphic hulls. *Invent. Math.*, 136(3):571–602, 1999.
- [13] Dennis JOHNSON : Spin structures and quadratic forms on surfaces. *J. London Math. Soc. (2)*, 22(2):365–373, 1980.
- [14] R. C. KIRBY et L. R. TAYLOR : Pin structures on low-dimensional manifolds. *In Geometry of low-dimensional manifolds, 2 (Durham, 1989)*, volume 151 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 177–242, Cambridge, 1990. Cambridge Univ. Press.
- [15] Shoshichi KOBAYASHI : *Differential geometry of complex vector bundles*, volume 15 de *Publications of the Mathematical Society of Japan*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987. Kanô Memorial Lectures, 5.
- [16] H. Blaine LAWSON, Jr. et Marie-Louise MICHELSON : *Spin geometry*, volume 38 de *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [17] Dusa MCDUFF et Dietmar SALAMON : *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 de *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [18] S. M. NATANZON : Finite groups of homeomorphisms of surfaces, and real forms of complex algebraic curves. *Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, 51:3–53, 258, 1988.
- [19] S. M. NATANZON : *Moduli of Riemann surfaces, real algebraic curves, and their superanalogues*, volume 225 de *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. Translated from the 2003 Russian edition by Sergei Lando.
- [20] Vsevolod SHEVCHISHIN : Pseudoholomorphic curves and the symplectic isotopy problem. Preprint math.SG/0010262, 2000.
- [21] Jake SOLOMON : *Intersection theory on the moduli space of holomorphic curves with lagrangian boundary conditions*. Thèse de doctorat, MIT, 2008.
- [22] Claude VITERBO : Symplectic real algebraic geometry. Non publié, 1999.
- [23] Jean-Yves WELSCHINGER : Real structures on minimal ruled surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 78(2):418–446, 2003.
- [24] Jean-Yves WELSCHINGER : Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry. *Invent. Math.*, 162(1):195–234, 2005.

Université de Lyon ; CNRS ; Université Lyon 1 ; Institut Camille Jordan.